УДК 681.5.015

**КУБРАК А. І., к.т.н., проф., ЖУЧЕНКО А. І., д.т.н., проф.**
**Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»**

# ПЕРЕДАТНІ ФУНКЦІЇ ТА ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ТЕПЛОАКУМУЛЮЮЧОЇ СТІНКИ

*Подано передатні функції та частотні характеристики циліндричної теплоакумулюючої стінки як об'єкта з розподіленими параметрами залежно від межових умов на зовнішній і внутрішній поверхнях. Результати можуть бути використані для синтезу систем керування.*

***Ключові слова:*** *передатна функція, частотна характеристика, циліндрична теплоакумулююча стінка, межові умови.*



**Постановка проблеми**. Майже всі реальні об'єкти керування в хімічній, харчовій, металургійній, нафтопереробній та інших галузях промисловості, фактично в усій сфері людської діяльності, є об'єктами з розподіленими параметрами. Лише у деяких частинних випадках (хоч і достатньо вживаних) такі об'єкти можна звести до відповідних зосереджених об'єктів з прийнятною похибкою [1]. З ускладненням об'єктів і підвищенням вимог до точності та адекватності їх моделювання подібні спрощення стають неможливими і вимагають урахування їх якісної специфіки. Усе це вимагає створення якісних математичних моделей для типових об'єктів з розподіленими параметрами.

**Аналіз попередніх досліджень**. Математичне моделювання об'єктів з розподіленими параметрами успішно розвивається понад півстоліття. Аналітичні методи розрахунку таких моделей можна поділити на точні та приблизні [2]. У першій групі праць [3–6] точний розв'язок наводиться для найпростіших систем, які описуються одним рівнянням у частинних похідних першого чи другого порядку. Розв'язки отримано перетвореннями Фур'є, Лапласа, методом джерел, розщеплюванням змінних. У другій групі праць [7–10] використано методи, що зводять розв'язок до системи інтегральних рівнянь Вольтера, Фредгольма, використання функцій Рімана. Спроби поширити ці методи на розв'язання практичних задач, зокрема пов'язаних із системами автоматичного керування, є недостатньо вдалими. Відомі праці, наприклад [11], в яких отримані трансцендентні передатні функції об'єктів з розподіленими параметрами. Але ці методи мають надто загальний характер, і їх не завжди можна застосувати в синтезі систем керування реальними об'єктами.

Тому обраний у цій праці шлях дослідження ґрунтується на таких міркуваннях: 1) розглядати тільки теплові об'єкти з розподіленими параметрами як найбільш поширені у промисловості; 2) математичну модель об'єктів з розподіленими параметрами отримати у вигляді передатної функції, як найбільш придатної для подальших досліджень із точки зору аналізу й синтезу систем керування за допомогою існуючих програмних засобів (MathCad, MatLab).

Сформульовані обмеження щодо класу досліджуваних об'єктів залишаються все ж таки занадто «слабкими», якщо мати на увазі обсяг наукової статті. Тому, щоб звузити клас досліджуваних об'єктів, а також враховуючи, що багато з них із точки зору математичного моделювання як об'єктів з розподіленими параметрами, можна розглядати як циліндричні теплоакумулюючі стінки, **метою** цієї праці є розроблення математичної моделі такої стінки у вигляді передатної функції.

**Виклад основного матеріалу**. Одновимірне диференційне рівняння теплопровідності в циліндричній системі координат має вигляд [1-5, 11, 13, 14].

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}\right).$$

Якщо виконати над ним перетворення Лапласа за нульових початкових умов та провести заміну змінної $r = x\big/\sqrt{p/a}$ , , то це рівняння набуде вигляду

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\bar{\theta}}{dx} - \bar{\theta} = 0. \qquad (1)$$

Це частинний випадок (коли $m = 0$) модифікованого диференційного рівняння Бесселя [12, 13]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Його розв'язок доцільно подати так:

$$y = C_1I_0(x) + C_2K_0(x), \qquad (2)$$

де $I_0$ і $K_0(x)$ – модифіковані функції Бесселя I і II роду нульового порядку. Розкладання у ряд цих функцій за малих значень $x$:

$$I_0(x)=1+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1^2\cdot 2^2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}+\ldots,\ K_0(x)=-\left(C+\ln\frac{x}{2}\right)I_0(x)+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\ldots;$$

за великих $x$:

$$I_0(x)=\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1+\frac{1^2}{1!\cdot 8x}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2!\cdot(8x)^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{3!\cdot(8x)^3}+\ldots\right),\ K_0(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\left(1-\frac{1^2}{1!\cdot 8x}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2!\cdot(8x)^2}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{3!\cdot(8x)^3}+\ldots\right),$$

де $C$ = 0,5772157… – стала Ейлера.

Нагадаємо поведінку модифікованих функцій Бесселя за граничних значень аргументу:

$$\begin{cases} I_0(x)\big|_{x\to 0}=1 \\ I_0(x)\big|_{x\to\infty}=\infty \\ K_0(x)\big|_{x\to 0}=\infty \\ K_0(x)\big|_{x\to\infty}=0 \end{cases}.$$

Похідні від $I_0(x)$ і $K_0(x)$:

$$\frac{dI_0(x)}{dx}=I_1(x),\quad \frac{dK_0(x)}{dx}=-K_1(x).$$

Розкладення в ряди для малих значень аргументу:

$$I_1(x)=\frac{x}{2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1^2\cdot 2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{1^2\cdot 2^2\cdot 3}+\ldots;\ K_1(x)=\frac{1}{x}I_0(x)+\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)I_1(x)-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^2\cdot 4}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{x^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\ldots$$

Асимптотичні ряди (для великих $x$):

$$I_1(x)=\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1-\frac{4-1^2}{1!\cdot 8x}+\frac{(4-1^2)(4-3^2)}{2!\cdot(8x)^2}-\ldots\right);\ K_1(x)=e^{-x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left(1+\frac{4-1^2}{1!\cdot 8x}+\frac{(4-1^2)(4-3^2)}{2!\cdot(8x)^2}+\ldots\right).$$

За граничних значень аргументу:

$$\begin{cases} I_1(x)\big|_{x=0}=0, \\ I_1(x)\big|_{x=\infty}=\infty, \\ K_1(x)\big|_{x=0}=-\infty \\ K_1(x)\big|_{x=\infty}=0. \end{cases}$$

Відповідно з (2) розв’язок диференційного рівняння (1) будемо шукати у вигляді

$$\bar{\theta}=C_1 I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+C_2 K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right). \tag{3}$$

Для визначення сталих інтегрування $C_1$ і $C_2$ потрібно, зазвичай, задати межові умови. Домовимося позначати межові умови на внутрішній поверхні циліндра як $N_{gv}$ (яке може набувати значень 1, 2, 3, що відповідають межовим умовам першого, другого і третього роду), на зовнішній поверхні – як $N_{gz}$ (з такими ж можливими значеннями і відповідним змістом). Циліндр вважатимемо порожнистим (внутрішній радіус $r_0$, зовнішній – $r_1$). Суцільний циліндр будемо вважати частинним випадком, коли $r_0 = 0$. Як межову умову на вісі суцільного циліндра відносно одновимірного диференційного рівняння теплопровідності розглядатимемо $N_{gv}$ = 2 за відсутності теплового потоку крізь «внутрішню поверхню», тобто вісь (це буде фактично умова симетрії температурного поля відносно осі). Домовимося позначати цей випадок як $N_{gv} = 0$.

Таким чином, розв’язок поставленої вище задачі залежить від комбінації межових умов на зовнішній та внутрішній поверхнях циліндра. Розглянемо деякі з можливих варіантів.

**Варіант 1**. $N_{gv} = 0$; $N_{gz} = 1$.

Межові умови: $\begin{cases} \left.\dfrac{d\bar{\theta}}{dr}\right|_{r=0}=0 \\ \bar{\theta}\big|_{r=r_1}=\bar{T}_z \end{cases}$. Після підстановки: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{p}{a}}C_1 I_1\left(r\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right)\Bigg|_{r=0}-\sqrt{\dfrac{p}{a}}C_2 K_1\left(r\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right)\Bigg|_{r=0}=0 \\ C_1 I_0\left(r\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right)\Bigg|_{r=r_1}+C_2 K_0\left(r\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right)\Bigg|_{r=r_1}=\bar{T}_z \end{cases}$,

$$I_1\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\Big|_{r=0}=0,\ K_1\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\Big|_{r=0}=-\infty,$$ тоді $C_2 = 0$. Отже $C_1 I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)=\bar{T}_z$ і $C_1=\dfrac{\bar{\theta}_z}{I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}$.

Остаточно $\bar{\theta}=\bar{T}_z\dfrac{I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}$, а передатна функція за каналом $T_z \to \theta(r)$: $W_{T_z\to\theta(r)}(p)=\dfrac{I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}$.

**Варіант 2**. $N_{gv} = 0$; $N_{gz} = 2$. Вочевидь $C_2 = 0$, як і в попередньому випадку, тоді як для зовнішньої поверхні $-\lambda\dfrac{d\bar{\theta}}{dr}\Big|_{r=r_1}=\overline{Q_z}$, де $\overline{Q}_z$ – зображення за Лапласом густини теплового потоку на зовнішній поверхні циліндра (за додатний напрям теплового потоку прийнято напрям зростання радіуса).

Тоді $-\lambda\sqrt{\frac{p}{a}}C_1 I_1\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\Big|_{r=r_1}=\overline{Q}_z$, звідки $C_1=-\dfrac{\overline{Q}_z}{\lambda\sqrt{\frac{p}{a}}I_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}$.

Остаточно $\bar{\theta}=-\overline{Q}_z\dfrac{I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{\lambda\sqrt{\frac{p}{a}}I_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}$, а передатна функція за каналом $Q_z \to \theta(r)$: $W_{Q_z\to\theta(r)}(p)=-\dfrac{I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{\lambda\sqrt{\frac{p}{a}}I_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}$.

**Варіант 3**. $N_{gv} = 0$, $N_{gz} = 3$. $C_2 = 0$, як і в попередньому випадку.

Межова умова для зовнішньої поверхні: $-\lambda\dfrac{d\bar{\theta}}{dr}\Big|_{r=r_1}=\alpha_1\left(\bar{\theta}\big|_{r=r_1}-\bar{T}_{sz}\right)$.

Тоді $-\lambda\sqrt{\frac{p}{a}}C_1 I_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)=\alpha_1\left[C_1 I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)-\bar{T}_{sz}\right]$, звідки $C_1=\dfrac{\bar{T}_{sz}}{\frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{p}{a}}I_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}$.

Остаточно $\bar{\theta}=\bar{T}_{sz}\dfrac{I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+\frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{p}{a}}I_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}$, а передатна функція за каналом $T_{sz}\to\theta(r)$ (температура теплоносія, що омиває зовнішню поверхню, – температура циліндра в функції радіуса):

$$W_{T_{sz}\to\theta(r)}(p)=\frac{I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+\frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{p}{a}}I_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}.$$

**Варіант 4**. $N_{gv} = 1$, $N_{gz} = 1$. Для внутрішньої поверхні $\theta\big|_{r=r_0}=T_v(t)$, для зовнішньої – $\theta\big|_{r=r_1}=T_z(t)$.

$$\begin{cases} C_1 I_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+C_2 K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)=\overline{T}_v(p) \\ C_1 I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+C_2 K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)=\overline{T}_z(p) \end{cases},$$

звідки $C_1=\dfrac{\overline{T}_v(p)K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)-\overline{T}_z(p)K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)}$ і $C_2=\dfrac{\overline{T}_z(p)I_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)-\overline{T}_v(p)I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)}$,

де $Z_n(p)=I_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)-I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)$.

Остаточно

$$\bar{\theta}=\bar{T}_v(p)\frac{K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)-I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)}+\bar{T}_z(p)\frac{I_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)-K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)},$$

а передатні функції

$$W_{T_v\to\theta(r)}(p)=\frac{K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)-I_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)},\ W_{T_z\to\theta(r)}(p)=\frac{I_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)-K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)}.$$

Застосовуючи наведений вище алгоритм визначення передатних функцій циліндричної теплоакумулюючої стінки, можна отримати розв’язки для решти варіантів стінки кінцевих розмірів. У цій статті розглянемо ще лише динаміку циліндричної порожнистої стінки з нескінченним зовнішнім радіусом. Позначимо цей варіант як $N_{gz}$ = 8.

**Варіант 5**. $N_{gv}$ = 1, $N_{gz}$ = 8.

Коли $r$ = ∞, температура може бути кінцевою, якщо $C_1=0$, оскільки $I_0(0)=\infty$. Тоді розв’язок (3): $\bar{\theta}=C_2K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)$. Оскільки межова умова на внутрішній поверхні – це $\theta\big|_{r=r_0}=T_v(t)$, $C_2=\dfrac{\bar{T}_v(p)}{K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}$.

Тоді передатна функція $W_{T_v\to\theta(r)}(p)=\dfrac{K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}$.

**Варіант 6**. $N_{gv}$ = 2, $N_{gz}$ = 8. Передатна функція $W_{Q_v\to\theta(r)}(p)=\dfrac{K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{\lambda\sqrt{\frac{p}{a}}K_1\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}$.

**Варіант 7**. $N_{gv}$ = 3, $N_{gz}$ = 8. Передатна функція $W_{T_{sv}\to\theta(r)}(p)=\dfrac{K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{1+\frac{\lambda}{\alpha}\sqrt{\frac{p}{a}}K_1\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}$.

Для розрахунку частотних характеристик на базі передатних функцій циліндричних стінок треба взяти до уваги такі співвідношення:

$$\begin{cases}I_0\left(x\sqrt{j}\right)=\mathrm{ber}(x)+j\,\mathrm{bei}(x)\\ \sqrt{j}I_1\left(x\sqrt{j}\right)=\mathrm{ber}'(x)+j\,\mathrm{bei}'(x)\\ K_0\left(x\sqrt{j}\right)=\mathrm{ker}(x)+j\,\mathrm{kei}(x)\\ \sqrt{j}K_1\left(x\sqrt{j}\right)=-\left[\mathrm{ker}'(x)+j\,\mathrm{kei}'(x)\right]\end{cases}. \tag{4}$$

Функції ber($x$), bei($x$) (Bessel real, Bessel imagine), ker($x$), kei($x$) (Kelvin real, Kelvin imagine) називають ще функціями Томсона (Кельвіна). Вони табульовані [16–17].

Якщо $x$ < 1:

$$\mathrm{ber}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{2^{4n}\left[(2n)!\right]^2};\quad \mathrm{bei}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2^{2n+2}\left[(2n+1)!\right]^2};$$

$$\mathrm{ker}(x)=\left(\ln\frac{2}{x}-C\right)\mathrm{ber}(x)+\frac{\pi}{4}\mathrm{bei}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{2^{2n}\left[(2n)!\right]^2}\sum_{m=1}^{2n}\frac{1}{m};$$

$$\mathrm{kei}(x)=\left(\ln\frac{2}{x}-C\right)\mathrm{bei}(x)+\frac{\pi}{4}\mathrm{ber}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2^{4n+2}\left[(2n+1)!\right]^2}\sum_{m=1}^{2n+1}\frac{1}{m};$$

$$\mathrm{ber}'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4nx^{4n-1}}{2^{4n}\left[(2n)!\right]^2};\quad \mathrm{bei}'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+2)x^{4n+1}}{2^{2n+2}\left[(2n+1)!\right]^2};$$

$$\ker'(x) = -\frac{1}{x}\operatorname{ber}(x) + \left(\ln\frac{2}{x} - C\right)\operatorname{ber}'(x) - \frac{\pi}{4}\operatorname{bei}'(x) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4nx^{4n-1}}{2^{4n}\left[(2n)!\right]^2}\sum_{m=1}^{2n}\frac{1}{m};$$

$$\operatorname{kei}'(x) = -\frac{1}{x}\operatorname{bei}(x) + \left(\ln\frac{2}{x} - C\right)\operatorname{bei}'(x) - \frac{\pi}{4}\operatorname{ber}'(x) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(4n+2)x^{4n+1}}{2^{4n+2}\left[(2n+1)!\right]^2}\sum_{m=1}^{2n+1}\frac{1}{m}.$$

Якщо $x \ge 1$:

$$\operatorname{ber}(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}}\left[L_0(x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - M_0(x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$\operatorname{bei}(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}}\left[M_0(x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - L_0(x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$\ker(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left[L_0(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + M_0(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$\operatorname{kei}(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left[M_0(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - L_0(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$\operatorname{ber}'(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}}\left[S_0(x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - T_0(x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$\operatorname{bei}'(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}}\left[T_0(x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + S_0(x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$\ker'(x) \cong -\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left[S_0(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + T_0(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$\operatorname{kei}'(x) \cong -\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left[T_0(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - S_0(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)\right].$$

Тут $L_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2}{n!(8x)^n}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$; $M_0(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2}{n!(8x)^n}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$;

$S_0(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)n!(8x)^n}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$; $T_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)n!(8x)^n}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$.

Припустимо, що необхідно розрахувати частотні характеристики за передатною функцією з варіанту 4:

$$W(j\omega) = \frac{I_0\left(r_0\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{j}\right)K_0\left(r\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{j}\right) - K_0\left(r_0\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{j}\right)I_0\left(r\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{j}\right)}{I_0\left(r_0\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{j}\right)K_0\left(r_1\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{j}\right) - I_0\left(r_1\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{j}\right)K_0\left(r_0\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{j}\right)}.$$

Якщо ввести позначини $\begin{cases} y_0 = r_0\sqrt{\frac{\omega}{a}} \\ y_1 = r_1\sqrt{\frac{\omega}{a}} \\ y = r\sqrt{\frac{\omega}{a}} \end{cases}$, то цей вираз, враховуючи (4), можна подати як $W(j\omega) = \frac{W(\omega)}{D(\omega)}$, де

де $W(\omega) = \left[\operatorname{ber}(y_0) + j\operatorname{bei}(y_0)\right]\left[\ker(y) + j\operatorname{kei}(y)\right] - \left[\ker(y_0) + j\operatorname{kei}(y_0)\right]\left[\operatorname{ber}(y) + j\ker(y)\right]$,

$D(\omega) = \left[\operatorname{ber}(y_0) + j\operatorname{bei}(y_0)\right]\left[\ker(y_1) + j\operatorname{kei}(y_1)\right] - \left[\operatorname{ber}(y_1) + j\operatorname{bei}(y_1)\right]\left[\ker(y_0) + j\operatorname{kei}(y_0)\right]$.

Виконавши множення і згрупувавши дійсні та уявні частини, можна отримати:

$$\begin{cases} W(\omega) = R_1 + jI_1 \\ D(\omega) = R_2 + jI_2 \end{cases},$$

де $R_1 = \operatorname{ber}(y_0)\ker(y) - \operatorname{bei}(y_0)\operatorname{kei}(y) - \ker(y_0)\operatorname{ber}(y) + \operatorname{kei}(y_0)\ker(y)$;

$I_1 = \operatorname{ber}(y_0)\operatorname{kei}(y) - \operatorname{bei}(y_0)\ker(y) - \ker(y_0)\operatorname{ber}(y) - \operatorname{kei}(y_0)\ker(y)$;

$R_2 = \mathrm{ber}(y_0)\ker(y_1) - \mathrm{bei}(y_0)\mathrm{kei}(y_1) - \mathrm{ber}(y_1)\ker(y_0) + \mathrm{bei}(y_1)\mathrm{kei}(y_0)$ ;

$I_2 = \mathrm{ber}(y_0)\mathrm{kei}(y_1) + \mathrm{bei}(y_0)\ker(y_1) - \mathrm{ber}(y_1)\mathrm{kei}(y_0) - \mathrm{bei}(y_1)\ker(y_0)$

Остаточно $W(j\omega) = R + jI$ , де $R = \dfrac{R_1R_2 - I_1I_2}{Z_n}$ , $I = \dfrac{I_1R_2 - R_1I_2}{Z_n}$ , $Z_n = R_2^2 + I_2^2$ .

Для реалізації цього алгоритму треба мати в розпорядженні підпрограми обчислення функцій ber($x$), bei($x$), ker(x), kei($x$), а в загальному випадку й ber'($x$), bei'($x$), ker'($x$), kei'($x$). За необхідності ці підпрограми користувач може створити самостійно за наведеними вище формулами. Можна також скористатися таблицями відповідних функцій, сформувавши на їх базі інтерполяційні структури (поліноми, кубічні сплайни або B-сплайни). Але найбільш доцільним є чисельне інтегрування диференціальних рівнянь (1) із відповідними межовими умовами за одиничного ступінчастого вхідного сигналу та нульових початкових умовах. У такий спосіб можна було б сформувати масив ординат перехідної характеристики. Шляхом чисельного диференціювання цей масив можна було б перерахувати в масив ординат імпульсної характеристики, а останній – у дійсно- та уявночастотні характеристики. Такий алгоритм розглянуто в праці [18].

**Висновки**. Одержано передатні функції та частотні характеристики об’єктів із розподіленими параметрами, які з точки зору їх математичного моделювання можна розглядати як циліндричні теплоакумулюючі стінки. Передатні функції є трансцендентними і їх безпосереднє використання для розв’язання задач аналізу та синтезу систем керування є нетривіальним. Ця обставина обумовлює шляхи подальших досліджень. Їх може бути декілька. Перший пов’язаний з розробленням методів безпосереднього використання передатних функцій нетривіальної структури для аналізу та синтезу систем керування. Другий передбачає використання відомих методів аналізу та синтезу систем керування. Але отримані у цій роботі передатні функції повинні бути подані у вигляді дробово-раціональних, що обумовлює потребу у розробленні методів апроксимації та аналізу їхньої ефективності.

**Список використаної літератури**


1. *Рапопорт Э. Я.* Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами / Э. Я. Рапопорт. – М. : Высш. шк., 2005. – 292 с.
2. *Шевяков А. А.* Управление тепловыми объектами с распределенными параметрами / А. А. Шевяков, Р. В. Яковлева. – М. : Энергоатомиздат, 1986. – 208 с.
3. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1965. – 474 с.
4. *Бутковский А. Г.* Методы управления систем с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1975. – 568 с.
5. *Лыков А. В.* Теплообмен / А. В. Лыков. – М. : Энергия, 1978. – 480 с.
6. *Сиразетдимов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами / Т. К. Сиразетдимов. – М. : Наука, 1977. – 470 с.
7. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 435 с.
8. *Лаврентьев М. А.* Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 416 с.
9. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 735 с.
10. *Згуровский М. З.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями / М. З. Згуровский, В. С. Мельник, А. Н. Новиков. – К. : Наук. думка, 2004. – 588 с.
11. *Бутковский А. Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1979. – 224 с.
12. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. – М. : Наука, 1977. – 534 с.
13. *Янке Е.* Специальные функции: формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Пеш. – М. : Наука, 1977. – 342 с.
14. *Грищенко А. З.* Комп’ютерне визначення коефіцієнтів передаточної функції дискретної моделі тепло-акумулюючої стінки / А. З. Грищенко, Н. А. Кубрак // Автоматизація виробничих процесів. – 2001. – № 1 (12). – С. 28-35.
15. *Кваско М. З.* Числові методи комп’ютерного моделювання автоматичних систем. Алгоритми і програми / М. З. Кваско, А. І. Кубрак, А. І. Жученко. – К. : Політехніка, 2003. – 360 с.
16. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М. : Наука, 1964. – 772 с.
17. *Носова Л. Н.* Таблицы функций Томсона и их первых производных / Л. Н. Носова. – М. : Изд-во АН СССР, 1960. – 422 с.
18. *Жученко А. І.* Ідентифікація динамічних характеристик. Комп’ютерні методи / А. І. Жученко, М. З. Кваско, Н. А. Кубрак. – К. : Вир. відділ КЛТКМ та М, 2000. – 182 с.



Надійшла до редакції 08.04.2013.