УДК 65.012.122

КУБРАК А. І., к.т.н., проф.; СИТНІКОВ О. В., ас.
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

ДИСКРЕТНА ПЕРЕДАТНА ФУНКЦІЯ АНАЛОГОВОГО ОБ'ЄКТА В СИСТЕМІ З ЦИФРОВИМ РЕГУЛЯТОРОМ

Наведено алгоритм визначення дискретної передатної функції в системі з цифровим регулятором за умови, що об'єкт є аналоговим. Результатом є одержання масиву ординат дискретної перехідної характеристики.

Ключові слова: *фіксатор нульового порядку, дискретна передатна функція, Z-зображення, різницеве рівняння.*

© Кубрак А. І., Ситніков О. В., 2015.

Постановка задачі та аналіз попередніх досліджень. Динаміку системи автоматичного керування з аналоговим об'єктом і цифровим регулятором можна моделювати, розглядаючи систему як аналогову (шляхом числового інтегрування з достатньо малим кроком) або ж як дискретну (з кроком інтегрування, що дорівнює періоду квантування цифрового регулятора). У першому варіанті поведінка об'єкта контролюється майже неперервно, у другому – лише в момент квантування. Часткова втрата інформації (про поведінку об'єкта в проміжку між періодами квантування) компенсується пришвидшенням розрахунку, завдяки чому можна переглянути більшу кількість варіантів. Це важливо, коли оптимізується система зі значною кількістю параметрів, що варіюються.

Мета статті – визначення дискретних моделей аналогового об'єкта, розрахованих на їхнє використання для дослідження динаміки систем із цифровим регулятором.

Виклад основного матеріалу. Схему системи автоматичного керування з аналоговим об'єктом і цифровим регулятором наведено на рис. 1.

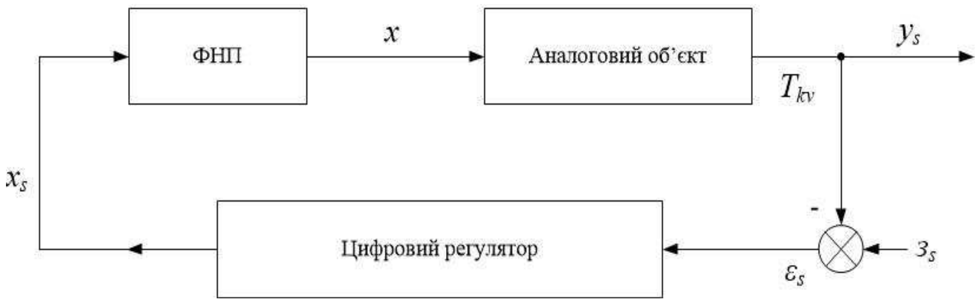

Рис. 1 – Структурна схема системи автоматичного регулювання з цифровим регулятором

Тут ε – сигнал розузгодження (аналоговий), ε_s – дискретна вибірка (з періодом квантування T_{kv}). Пристрій, що перетворює неперервний сигнал ε у дискретний ε_s – ключ або модулятор. Цифровий регулятор – перетворює дискретну послідовність імпульсів ε_s у дискретну ж послідовність імпульсів x_s (з тим же періодом квантування T_{kv}). ФНП – фіксатор нульового порядку (демодулятор) – фіксує (демодулює) імпульси x_s в прямокутні імпульси (шириною T_{kv} і висотою x_s), формуючи неперервний (ступінчастий) сигнал *x*, який надходить безпосередньо на вхід аналогового об'єкта [1].

Аналогова передатна функція об'єкта має вигляд

$$W_{об}(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0} e^{-p\phi}$$

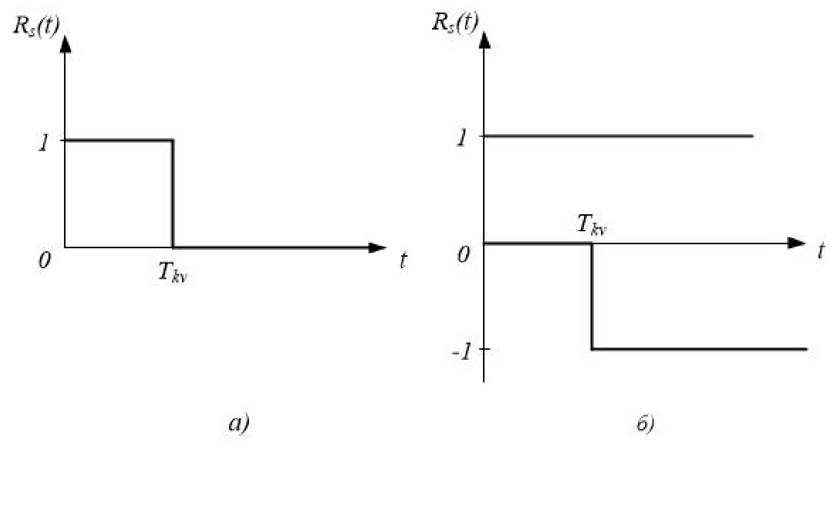

Рис. 2 – Реакція ФНП на одиничний імпульс

Необхідно знайти алгоритм розрахунку реакції об'єкта y_s (у момент квантування T_{kv}) на послідовність імпульсів, що генерує цифровий регулятор x_s. Тим самим, мова йде про динамічні властивості блока «ФНП – аналоговий об'єкт – модулятор». Розглянемо динаміку ФНП. Останній перетворює одиничний імпульс $\delta(t)$ на прямокутний завширшки T_{kv} (рис. 2, *а*). Прямокутний імпульс $R_s(t)$ можна подати як суму двох одиничних ступінчастих сигналів, зсунутих в часі на T_{kv} і протилежних за знаком (рис. 2, *б*).

Зображення за Лапласом від сигналу $R_s(t)$ $L[R_s(t)] = 1/p - 1/p\cdot e^{-pTkv} = \left(1-e^{-pTkv}\right)/p$. Але ж $R_s(t)$ – це імпульсна характеристика ФНП (реакція на одиничний імпульс), отже, $L[R_s(t)\ ]$ – це передатна функція ФНП $W_{\text{ФНП}}(p) = \left(1-e^{-pTkv}\right)/p$. Передатна функція модулятора $W_{\text{М}}(p) = 1/(Tk)$. Передатна функція блока «ФНП – об'єкт – модулятор» $W_{\text{ФОМ}}(p) = \left(1-e^{-pTkv}\right)/(pT_{kv})\cdot W_{\text{об}}(p)$.

Саме для цього блока необхідно знайти реакцію на одиничний імпульс (зображення якого за Лапласом дорівнює 1), тобто передатну функцію блока, придатну для визначення реакції не як неперервної функції часу, а дискретної вибірки (з періодом T_{kv}) імпульсної характеристики аналогового об'єкта. Мова йде про знаходження дискретної передатної функції розгляданого блоку.

Нехай аналогова передатна функція об'єкта $W_{\text{об}}(p) = \dfrac{1}{(Tp+1)^2}\cdot e^{-rpT_{kv}}$.

Тоді $W_{\text{ФОМ}}(p) = \dfrac{1}{T_{kv}}\cdot\left(1-e^{-pT_{kv}}\right)\cdot e^{-rpT_{kv}}\cdot\dfrac{1}{p(Tp+1)^2}$. Розкладемо останній множник на доданки:

$$\frac{1}{p(Tp+1)^2} \equiv \frac{C_0}{p} + \frac{C_1}{(Tp+1)} + \frac{C_2}{(Tp+1)^2} \tag{1}$$

Вочевидь $C_0 = \left.\dfrac{1}{(Tp+1)^2}\right|_{p=0} = 1$, $C_2 = \left.\dfrac{1}{p}\right|_{p=-\frac{1}{T}} = -T$.

Перенесемо доданок із C_2 у виразі (1) в його ліву частину: $\dfrac{1}{p(Tp+1)^2} + \dfrac{T}{(Tp+1)^2} \equiv \dfrac{C_0}{p} + \dfrac{C_1}{(Tp+1)}$ і зведемо ліву частину до спільного знаменника, після чого скоротимо ліву частину на $(Tp+1)$: $\dfrac{1}{p(Tp+1)} \equiv \dfrac{C_0}{p} + \dfrac{C_1}{(Tp+1)}$, звідки $C_1 = \left.\dfrac{1}{p}\right|_{p=-\frac{1}{T}} = -T$. Підставляючи знайдені коефіцієнти в (1), одержимо $\dfrac{1}{p(Tp+1)^2} \equiv \dfrac{1}{p} - \dfrac{T}{(Tp+1)} - \dfrac{T}{(Tp+1)^2}$, або $\dfrac{1}{p(Tp+1)^2} \equiv \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+б} - \dfrac{1}{T}\cdot\dfrac{1}{(p+б)^2}$, де $\alpha = 1/T$.

Зображенням в правій частині ставимо у відповідність Z-зображення:

$$\frac{1}{p(Tp+1)^2} \to \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+e^{-бT_{kv}}} - \frac{z\cdot e^{-бT_{kv}}}{\left(z-e^{-бT_{kv}}\right)^2}, \text{ або } \frac{1}{p(Tp+1)^2} \to z\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-в} - \frac{в}{(z-в)^2}\right], \text{ де } \beta = e^{-бT_{kv}}.$$

$$\frac{1}{p(Tp+1)^2} \to z\cdot\left[\frac{1-в}{(z-1)(z-в)} - \frac{в}{(z-в)^2}\right],\quad \frac{1}{p(Tp+1)^2} \to z\cdot\frac{(1-в)(z-в)-в(z-1)}{(z-1)(z-в)^2},$$

$$\frac{1}{p(Tp+1)^2} \to z\cdot\frac{(1-2в)z-в^2}{(z-1)(z-в)^2}. \tag{2}$$

А тепер повернемося до $W_{\text{ФОМ}}(p)$, замінюючи в ньому $1-e^{-pTkv} = 1-z^{-1} = \dfrac{z-1}{z}$, $e^{-rpTkv} = z^{-r}$ і підставляючи туди вираз (2): $W_{ФОМ}(z) = \dfrac{1}{T_{kv}}\cdot\dfrac{z-1}{z}\cdot z^{-r}\,\dfrac{(1-2в)z+в^2}{(z-1)(z-в)^2}$. Спрощуємо: $W_{\text{ФОМ}}(z) = \dfrac{1}{T_{kv}}\cdot z^{-r}\cdot\dfrac{(1-2в)z+в^2}{z^2-2вz+в^2}$, $W_{\text{ФОМ}}(p) = \dfrac{b_{r+1}^* z^{-(r+1)} + b_{r+2}^* z^{-(r+2)}}{a_0^* + a_1^* z^{-1} + a_2^* z^{-2}}$, де $b_{r+1}^* = (1-2в)/T_{kv}$, $b_{r+2}^* = в^2/T_{kv}$, $a_0^* = 1$, $a_1^* = -2в$, $a_2^* = в^2$.

У загальному випадку дискретна передатна функція $W_{\text{ФОМ}}(p)=\dfrac{b_m^* z^{-m}+b_{m-1}^* z^{-(m-1)}+...+b_1^* z^{-1}+b_0^*}{a_n^* z^{-n}+a_{n-1}^* z^{-(n-1)}+...+a_1^* z^{-1}+a_0^*}$, де виконання умови $m \le n$ уже не є обов'язковим (хоча б за рахунок множника z^{-r}, що відображає вплив транспортного запізнювання). Цій функції відповідає різницеве рівняння [2]:

$$a_n^* y_{s-n}+...+a_2^* y_{s-2}+a_1^* y_{s-1}+a_0^* y_s = b_m^* x_{s-m}+...+b_1^* x_{s-1}+b_0^* x_s, \qquad (3)$$

яке можна розв'язати відносно y_s:

$$y_s=\frac{1}{a_0^*}\left(\sum_{i=0}^{m} b_i^* x_{s-i}-\sum_{i=1}^{n} a_i^* y_{s-i}\right), \quad s \ge 0, \qquad (4)$$

де $y_s = y\big|_{t=sT_{kv}}, x_s = x\big|_{t=sT_{kv}}$.

Співвідношення (4) можна розглядати як рекурентне, якщо відомі «початкові умови» (тобто значення $x_s(-m \le s \le 0)$ і $y_s(-n \le s \le -1)$. Якщо початковий стан – нульовий (усталений режим, від якого ведеться відлік як x так і y), то «початкові відрізки $x_s\big|_{-m \le s \le 0}=0, \quad y_s\big|_{-n \le s \le -1}=0$.

Рекурентна формула (4) легко програмується. Так якщо $x_s=\begin{cases}0 & \text{коли } s<0\\ 1 & \text{коли } s \ge 0\end{cases}$, то розрахунок масиву Htd:Coefl реакції об'єкта, що задається рівнянням (3) або дискретною передатною функцією $W_{\text{ФОМ}}$ за нульових початкових умов, можна оформити у вигляді підпрограми *FormHtd* [3]. Масив Htd:Coefl – це дискретна (із кроком T_{kv}) вибірка перехідної характеристики базового аналогового об'єкта.

```
procedureFormHtd (Bd, Ad:Coef; Nt:integer; varHtd:Coefl);
var z, s, n, m:integer;
Tkv,Sum:real;
begin
n:=round(Ad[-1]); Tkv:=Ad(n+1);
m:=round(Bd[-1]); Htd[-1]:=Nt; Htd[Nt+1]:=Tkv;
for z:=0 to Nt do
    begin
    Sum:=0;
    for s:=0 to m do
            if z-s>=0 then Sum:=Sum+Bd[s];
    for s:=1 to n do
            if z-s>0 then Sum:=Sum-Ad[s]*Htd[z-s];
    Htd[z]:=Sum/Ad[0];
    end;
end;
```

Тут type Coef = array[-1..31] of real; typeCoefl = array [-1..601] of real. Масиви Bd, Ad:Coef містять інформацію про коефіцієнти передатної функції і, відповідно, різницевого рівняння (3).

Співпадіння ординат аналогової перехідної характеристики в моменти дискретизації з відповідними дискретами гратчастої функції свідчить про коректність формування дискретної передатної функції (4).

Разом із цим, алгоритм формування дискретної передатної функції є незовсім зручним для практичної реалізації, тому що необхідно визначати корені знаменника передатної функції, розраховувати коефіцієнти розкладання дробово-раціонального виразу на елементарні доданки, мати під рукою детальні таблиці відповідностей між *L*- і *Z*-зображеннями. Ці обставини ускладнюють комп'ютерну реалізацію описаного процесу.

Висновок. Розроблено алгоритм визначення дискретної передатної функції в системі з цифровим регулятором за умови, що об'єкт є аналоговим. Результатом є одержання масиву ординат дискретної перехідної характеристики.

Список использованной литературы

1. *Жученко А. І.* Комп'ютерне моделювання та ідентифікація автоматичних систем / А. І. Жученко, А. І. Кубрак, М. З. Кваско. – К. : Політехника, 2004. – 424 с.

Голінко І. М. Моделювання та оптимізація систем керування / І. М. Голінко, А. І. Кубрак. – Кам'янець-Подільський : ПП Буйницький, 2012. – 262 с.