

КОЛОСОВА О. П., ас.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

## ПРОГНОЗУВАННЯ СТРУКТУРНИХ ПАРАМЕТРІВ ПОЛІМЕРНИХ КОМПОЗИЦІЙНО-ВОЛОКНИСТИХ МАТЕРІАЛІВ ЗА МЕТОДОЛОГІЄЮ ТЕОРІЇ ІНТЕГРАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ Й ГЕОМЕТРИЧНИХ ІМОВІРНОСТЕЙ

*Запропоновано удосконалену методику прогнозування структурних параметрів полімерних композиційно-волокнистих матеріалів на базі використання методології теорії інтегральної геометрії й геометричних ймовірностей. Ця теорія досліджує плоскі опуклі фігури, що перетинаються випадковими прямими. Розглянуто розподіл волокон у структурі орієнтованого композиту, що використовується, зокрема, для подальшого детермінування кінетичних параметрів технологічного процесу просочення однонаправлених волокнистих наповнювачів рідкими полімерними зв'язуючими. Для окремого випадку у припущенні про розподіл радіусів вузлових кіл, що апроксимують волокна, у вузлах подвійноперіодичної решітки за гамма-законом, а також про рівномірність розподілу паралельних випадкових січних уздовж однієї зі сторін паралелограма, знайдена теоретична функція розподілу довжин екстхорд суміжних кіл і досліджено її поведінку при наближенні до характерних асимптот.*

**Ключові слова:** прогнозування, параметр, технологія, полімер, композит, волокно, модель, структура, інтегральна геометрія, геометричні ймовірності

© Колосова О. П., 2015.

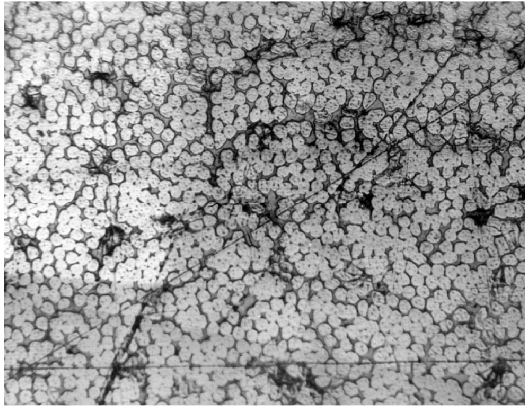
**Постановка проблеми.** Апарат теорії інтегральної геометрії та геометричних ймовірностей знаходить все більше застосування для вирішення ряду задач – як теоретичного плану, так і практичних [1, 2]. Факти, що встановлює ця теорія, стають основою напрямку, що швидко розвивається й займається вивченням геометричних об'єктів випадкового характеру (випадкових точкових полів, прямих, мозаїк тощо), інваріантних відносно груп перетворень простору.

Значна кількість важливих задач у теорії геометричних ймовірностей пов'язана з опуклими фігурами (плоскими та об'ємними), що перетинаються випадковими прямими (або площинами). Теорії, що виникають при цьому, тісно пов'язані з теорією фігур. Фігури можуть мати загальну форму, бути опуклими чи колами. У двовимірному випадку теорія геометричних ймовірностей використовує метод накладення на досліджувану область випадкової прямої довжини  $L$ , так званої січної, після чого вимірюють перерізи цієї січної з фігурами, що, у свою чергу, не перетинаються між собою.

Слід відзначити, що теорія інтегральної геометрії й геометричних ймовірностей має широкий діапазон застосувань у природознавстві й техніці. Так, наприклад, ці завдання виникають в екології (оцінка рослинного покриву або щільності ареалу, зокрема, дерев на тій чи іншій площі), у хімічній технології при аналізі колоїдних розчинів (розподіл розмірів частинок у непрозорому середовищі), теоретичному вивченні пересувань опуклих об'єктів та в ряді інших випадків.

Не менш актуальним є дослідження стохастичного розподілу волокон у структурі орієнтованих (односпрямованих) волокнистих полімерних композитів (ОВПК), яким визначаються властивості міцності затверділого композиту й прогнозовані технологічні параметри процесу просочення орієнтованого волокнистого наповнювача (ОВН) рідким полімерним зв'язуючим.

**Аналіз попередніх досліджень і публікацій.** Повертаючись до моделювання структури ОВПК, варто зупинитися на декількох моментах. По-перше, для зручності приймемо форму волокон у поперечному перерізі ОВПК круглою, що не буде великою помилкою. По-друге, на підставі аналізу реальних шліфів поперечних перерізів затверділих ОВПК (рис. 1) будемо розглядати його геометричну структуру у вигляді безлічі кіл, що не перетинаються. Можна прийняти діаметри (радіуси) волокон такими, що суттєво не відрізняються один від одного (на практиці відмінність становить в середньому 10 %) в силу технології їхнього формування, за якої використовують фільтри одного діаметра [3].



**Рис. 1 – Типова фотографія (збільшення  $\times 1200$ ) мікросхліфу поперечного перерізу орієнтованого епоксидного органопластика**

По-третє, внаслідок особливостей просочення [3], зокрема стохастичності розподілу змотуваних із бобіни й просочуваних полімерним зв'язуючим пучків (джгутів, жмутів, ровінгів) ОВПК у просочувальній ванні за певного зусилля натягу, спостерігається стохастичність (випадковість) геометричних параметрів упаковки волокон у досліджуваному шліфі ОВПК (див. рис. 1). Це зумовлює доцільність застосування статистичних підходів до детермінування параметрів адекватної геометричної (структурної) моделі ОВПК разом із застосуванням теорії випадкових (стохастичних) процесів.

По-четверте, особливістю геометричної структури шліфа ОВПК є щільна упаковка волокон, обумовлена технологією формування ОВПК (див. рис. 1). Це зумовлює можливість апроксимації реальних геометричних структур ОВПК регулярними структурами, зокрема, подвійно періодичними. Це дає

можливість оцінити досліджувані параметри ОВПК.

У працях [4–6] одержано аналітичні вирази для розподілу довжин хорд кіл для загального випадку подвійно періодичних структур, а в працях [7–9] розглянуто загальні принципи побудови моделі структури в теорії армованих композиційних середовищ [7], а також деякі питання детермінування параметрів геометричної моделі структури ОВПК, зокрема при проведенні натурного й числового експериментів [8–9].

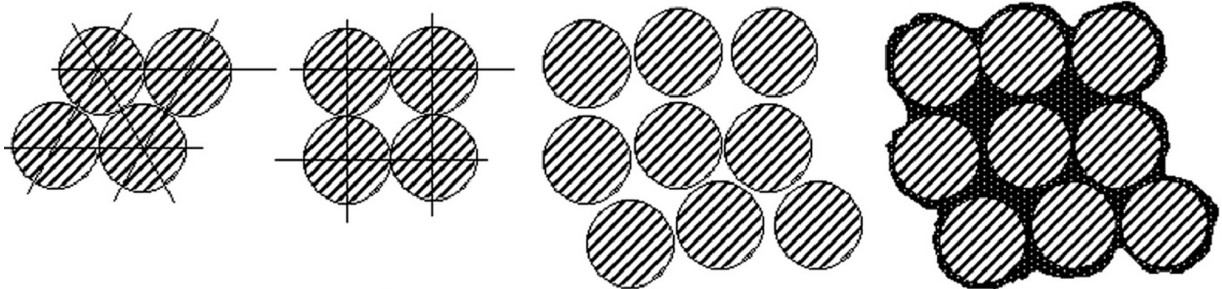
Завдання розподілу довжин хорд кіл, що перетинаються випадковою січною, для одного кола й кінцевої кількості кіл вирішено в праці [10], а вплив параметрів розподілу вуглецевих волокон на їхні механічні властивості залежно від вигляду функції розподілу волокон за довжиною досліджено в праці [11].

Водночас, для низки технологічних завдань одержання ОВПК, окрім знаходження розподілу довжин хорд кіл, необхідним є визначення відстаней між сусідніми (суміжними) модельними колами. Відповідні залежності можливо використовувати, наприклад, для прогнозування (проектування чи попереднього оцінювання) технологічних параметрів просочення.

Останній аспект підкреслює актуальність застосування структурно-параметричної методології геометричного моделювання досліджуваних об'єктів, зокрема для вирішення конкретних технологічних завдань.

**Метою статті** є розроблення удосконаленої методики прогнозування структурних параметрів полімерних композиційно-волоконистих матеріалів, що спирається на використання методології теорії інтегральної геометрії й геометричних імовірностей, зокрема для дослідження розподілу волокон у структурі перерізу орієнтованого композиту, для подальшого детермінування кінетичних параметрів технологічного процесу просочення однонаправлених волоконистих наповнювачів рідкими полімерними зв'язуючими.

**Основні матеріали для дослідження.** Попередньо зробимо ряд зауважень, що стосуються особливостей розміщення волокон (кіл) у плоскому перерізі (шліфі) ОВПК. З одного боку, теоретично прагнуть отримати граничний ступінь армування (вміст волокон)  $\xi_a$  в ОВПК, тобто виходять із найбільш щільного геометричного упакування циліндрів як волокон (рис. 2). Це спричинено суттєвими відмінностями (більше, аніж на порядок) властивостей міцності зв'язуючої полімерної матриці та армуючих волокон, що сприймають основне навантаження на затверділий ОВПК. З іншого боку, щільна укладка волокон є небажаною. Кожне волокно має бути оточене шаром полімерної матриці (зв'язуючого) для забезпечення адгезії волокон до полімерної матриці й монолітності структури ОВПК і конструкційних виробів на їхній основі. У зв'язку з цим на практиці  $\xi_a = 0,60 \dots 0,75$  [3].

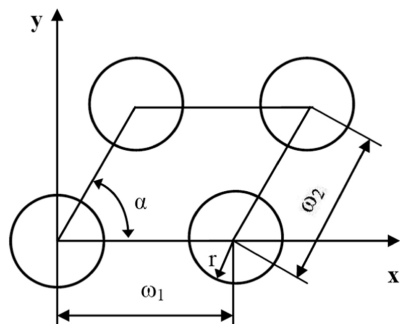


*a – гексагональна,  $\xi_a = 0,907$ ; б – квадратна,  $\xi_a = 0,785$ ; в – реальна односпрямована,  $\xi_a = 0,60 \dots 0,75$ ; г – реальна у зв'язуючій полімерній матриці (полімерне зв'язуюче зачорнене)*

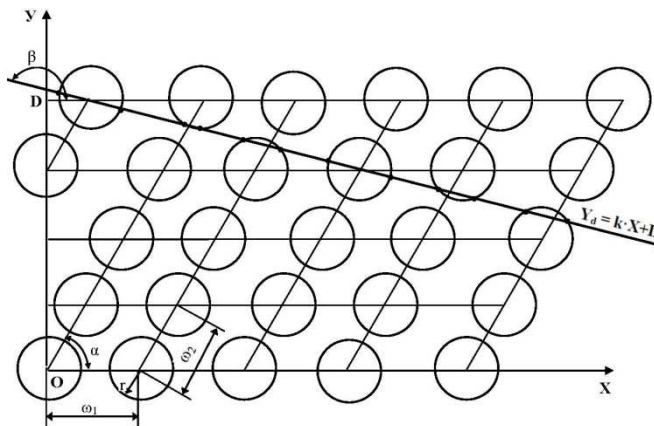
**Рис. 2 – Геометричні схеми упаковки волокон за різного вмісту волоконистого наповнювача**

Виберемо для подальшого моделювання ОВПК модель Г. Ваніна [5–6] у вигляді системи циліндричних волокон, осі яких у загальному випадку є паралельними й розташованими у вузлах подвійноперіодичної (регулярної) решітки паралелограмів, а простір між волокнами заповнений полімерною матрицею (зв'язуючим середовищем). При цьому перерізи волокон (кіл) не накладаються.

У загальному випадку елементарна базисна комірка (далі – ЕБК) такої моделі є паралелограмом (із гострим кутом при вершині  $\alpha = 60^\circ$ ), у вузлах якого розташовані кола радіуса  $r$  (рис. 3). Площину поперечного шліфа досліджуваного ОВПК моделюємо подвійно періодичним продовженням ЕБК (рис. 4).



**Рис. 3 – Геометрична модель елементарної базисної комірки**



**Рис. 4 – Модельна решітчаста площина, одержана подвійно періодичним продовженням ЕБК**

У силу специфіки досліджуваного завдання нас буде цікавити переважно розподіл відстаней (довжин) між сусідніми волокнами (колами) в решітчастій площині, що моделює розміщення волокон в структурі поперечного шліфа ОВПК.

Надалі візьмемо, як у працях [6-9], за критерій адекватності досліджуваної моделі збіг із достатнім ступенем точності (на практиці 90...95 %) коефіцієнтів кривих розподілів та їхніх імовірнісних характеристик (математичного очікування) в геометричній моделі і в натурному шліфі ОВПК.

Таким чином, використання методології теорії інтегральної геометрії й геометричних ймовірностей [1,2] для моделювання геометричних параметрів структурної моделі ОВПК зводяться до такого.

Існує подвійно періодична геометрична плоска модель у вигляді решітки, утворена на основі ЕБК, яка (для зручності й спрощення) є паралелограмом зі сторонами  $\omega_1$  і  $\omega_2$  і кутом між ними  $\alpha$ , у вершинах (вузлах) якого розташовані кола радіуса  $r$ . У цю модельну решітчасту площину «вкидається» випадкова січна  $L = Y_d$ , уздовж якої детермінуються відстані між сусідніми колами (довжини «екстхорд» або «зовнішніх хорд» кіл [7-9]). На підставі масиву замірів довжин екстхорд будується експериментальна гістограма й визначається аналітичний вид шуканої кривої розподілу довжин екстхорд та її статистичні характеристики.

Проаналізуємо теоретичний розподіл довжин хорд та екстхорд кіл у модельній решітчастій площині в разі їхнього перетину сімейством рівномірно розподілених прямих  $\Pi$  на площині  $\mathbb{R}^2$ . Зауважимо, що в такій ймовірнісній постановці в працях [7-9] одержані експериментальні розподіли довжин хорд та екстхорд волокон розглянутих ОВПК.

Зокрема, модельні і експериментальні криві (функції) розподілів довжин хорд волокон (кіл) та їхніх екстхорд можуть аналітично апроксимуватися, зокрема, за допомогою універсального трипараметричного розподілу Г. Ваніна, що має  $\delta$ -подібний характер, і який детермінований за додатних значень випадкової змінної  $z$  [12]:

$$P(z) = \left( \frac{z}{\sigma\sqrt{2}} \right)^b \frac{\exp\left(-\frac{a_0^2}{2} - \frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{a_0 z}{\sigma}\right)}{a_0 \sigma \Gamma\left(1 + \frac{b_0}{2}\right) F\left(\frac{1-b_0}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{a_0^2}{2}\right)}$$

де  $\sigma(x)$  – середньоквадратичне відхилення;  $a_0$  і  $b_0$  – безрозмірні параметри, що встановлюються, як і  $\bar{S}_\sigma(x)$ , за експериментальними даними;  $\Gamma(1 + b_0/2)$  – гамма-функція Ейлера;  $F[(1 - b_0)/2, 3/2, -a_0^2/2]$  – вироджена гіпергеометрична функція Куммера.

Наведемо також формулу для визначення моменту порядку  $n$  випадкової величини  $z$  розподілу  $P(z)$ :

$$M(z^n) = (\sigma\sqrt{2})^n \frac{\Gamma\left(1 + \frac{b_0 + n}{2}\right) F\left(\frac{1-b_0-n}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{a_0^2}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{b_0}{2}\right) F\left(\frac{1-b_0}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{a_0^2}{2}\right)}$$

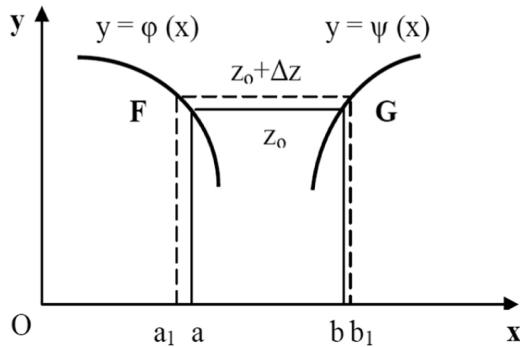
Зауважимо, що можливі й інші залежності для опису функції розподілу довжин екстхорд волокон.

У розглянутій постановці випадкова пряма  $L$  з сімейства  $\Pi$  перетинає безліч (сімейство) кіл системи  $F$  за безлічно хорд, причому довжини  $\rho$  відрізків прямої  $L$  (розглядаються тільки кінцеві значення довжин  $\rho$ ), кінці яких лежать на колах системи  $F$ , не перетинаючись з ними, є прикладами екстхорд. При цьому екстхорди символізують відстані між волокнами в перетині ОВПК (тобто в області, де розташована полімерна матриця), а довжини хорд і екстхорд кіл носять випадковий характер.

Нехай  $g(r)$  – щільність розподілу радіусів  $r$  кіл вищевказаної модельної решітчастої системи  $F$ . Для щільності розподілу радіусів кіл  $g(r)$  вибраний гамма-розподіл [12]:

$$g(r) = \begin{cases} \left( \frac{\lambda^\delta}{\Gamma(\delta)} \right) r^{\delta-1} \exp(-\lambda r) & r > 0, \\ 0 & r \leq 0, \end{cases}$$

з параметрами  $\alpha = R_0^2/D_0$ ,  $\lambda = R_0/D_0$ , де  $R_0$  – середній радіус волокон ОВПК;  $D_0$  – дисперсія відхилення від середнього випадкового радіуса  $r$ ;  $\Gamma(\alpha)$  – гамма-функція Ейлера.



**Рис. 5** – Схема до обчислення функції розподілу довжин екстхорд для фігур  $F$  і  $G$

Розглянемо теоретичний розподіл довжин екстхорд кіл у модельній решітчастій площині в разі їхнього перетину сімейством рівномірно розподілених прямих  $\Pi$  на площині  $\mathbb{R}^2$ . Нехай межі двох суміжних (замкнутих) фігур  $F$  і  $G$  (рис. 5) локально описуються в системі координат  $Ox$  рівняннями  $y = \varphi(x)$  і  $y = \psi(x)$ , а випадкова пряма, що належить сімейству  $\Pi$ , і паралельна осі  $Ox$ , перетинає фігури  $F$  і  $G$  у точках  $(a, \varphi(a))$  і  $(b, \psi(b))$  (рис. 5). При цьому  $\varphi(a) = \psi(b)$ ,  $b - a = z_0$ .

Обчислимо функцію розподілу довжин екстхорд кіл  $f_\rho(z)$ . Нехай  $a_1, b_1$  – такі точки на осі  $Ox$ , що

$$\varphi(a_1) = \psi(b_1), \quad b_1 - a_1 = (b - a) + \Delta z = z_0 + \Delta z,$$

де  $\Delta z$  – нескінченно мала. Функції  $\varphi(a)$  і  $\psi(b)$  можна вважати нескінченно диференційованими. Розклавши їх в ряд Тейлора, одержимо:

$$\begin{cases} \varphi(a) = \psi(b), \\ \varphi(a_1) = \psi(b_1), \\ b_1 - b = a_1 - a + \Delta z, \\ \varphi(a_1) = \varphi(a) + \varphi'(a) \cdot (a_1 - a) + \varphi''(a) \cdot (a_1 - a)^2 / 2 + O(a_1 - a)^2, \\ \psi(b_1) = \psi(b) + \psi'(b) \cdot (b_1 - b) + \psi''(b) \cdot (b_1 - b)^2 / 2 + O(b_1 - b)^2. \end{cases}$$

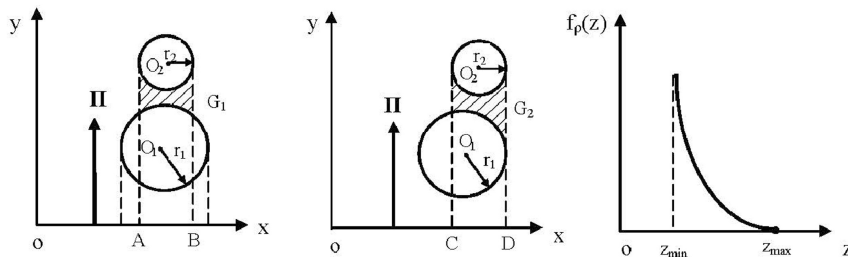
За визначенням функції розподілу довжин екстхорд кіл  $f_p(z) = \frac{1}{|G|} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\varphi(a_1) - \varphi(a)}{\Delta z}$ , де  $|G|$  – міра (довжина, площа) фігури  $G$  щодо сімейства  $\Pi$ . Позначимо  $\Delta a = a_1 - a$ ,  $\Delta b = b_1 - b$ .

Прирівнявши четверте і п'яте рівняння в наведеній системі з точністю до малих другого порядку, одержимо  $\psi'(b) \cdot (\Delta a + \Delta z) = \varphi'(a) \cdot \Delta a$ , звідки  $\psi'(b) \cdot \Delta z = [\varphi'(a) - \psi'(b)] \cdot \Delta a$ ;  $\frac{\Delta a}{\Delta z} = \frac{\psi'(b)}{\varphi'(a) - \psi'(b)}$ .

Тому в точці  $z_0$   $f_c(z_0) = \frac{1}{|G|} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\varphi(a_1) - \varphi(a)}{\Delta z} = \frac{1}{|G|} \cdot \frac{\varphi'(a) \cdot \psi'(a + z_0)}{\varphi'(a) - \psi'(a + z_0)}$ , а в точці  $b - a = z$ ,  $z_0 = 0$  і

$f_c(z_0) = k_1 \frac{\varphi'(a) \cdot \psi'(b)}{\varphi'(a) - \psi'(b)}$ , де  $k_1$  – множник, що в загальному випадку не залежить від  $z$ .

Зрозуміло, що  $f_p(z_0) = 0$ , коли  $\varphi(a) = 0$ , або  $\psi(a + z_0) = 0$ , і  $f_p(z_0) \rightarrow \infty$ , коли дотичні до кривих  $y = \varphi(x)$  і  $y = \psi(x)$  є паралельними в точках  $y = \varphi(a)$  і  $y = \psi(a + z_0)$ , тобто коли значення похідних дорівнюють нулю. І якщо графік функції  $y = \psi(x)$  зсунути уздовж осі  $Ox$  на  $\Delta$ , то  $f_p(z)$  зсунеться уздовж  $Oz$  на ту ж величину.



**Рис. 6 – Варіанти взаєморозташувань кіл  $O_1$  і  $O_2$  ( $a, \delta$ ) і розподіл довжин екстхорд  $f_p(z)$  для різних розташувань цих кіл ( $\epsilon$ )**

Гістограма розподілу довжин екстхорд кіл має асимптоту в точці  $z_{\min}$  (рис. 6,  $\epsilon$ ), в якій відстань уздовж прямої  $\Pi$  між фігурами  $O_1$  і  $O_2$  є мінімальною, і дорівнює нулю в точках дотику з будь-яким із кіл  $O_1$  і  $O_2$ .

Будь-яка область  $G_i$ , для якої потрібно обчислити розподіл  $f_p(z)$ , може бути уявлена як «обмеження»

областей  $G_1$  і  $G_2$  (рис. 6,  $a, \delta$ ) підвідрезками відрізків  $AB$  і  $CD$ , тобто частинами областей  $G_1$  і  $G_2$ , розташованими над відповідними підвідрезками.

Функція  $f_p(z)$  в підобласті, що є «обмеженням» на підвідрізок, є обмеженням функції для всієї області. Таким чином, функції  $f_p(z)$  для областей  $G_i$  мають вигляд обмежень на певний відрізок  $[z_{\min}, z_{\max}]$ .

Локальне математичне очікування випадкової величини довжини екстхорди для  $y = \varphi(x)$  і  $y = \psi(x)$ , що дорівнює за визначенням  $\int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} z f(z) dz$ , є площею заштрихованої криволінійної трапеції з нормувальним

коефіцієнтом  $1/|G|$  (див. рис. 6,  $\delta$ ). Для всієї фігури  $Mc_G = \int_G z f_c(z) dz = \frac{S_G}{|G|}$ , де  $S_G$  – площа фігури  $G$ .

Цю формулу одержано для фігур, що перетинаються прямими  $\Pi$  не більше одного разу. Для складніших

фігур  $Mc = \sum_{i=1}^n \beta_i Mc_i = \frac{\sum_{i=1}^n S_{G_i}}{\sum_{i=1}^n |G_i|} = \frac{S_G}{\sum_{i=1}^n |G_i|}$ , де  $G = \bigcup G_i$  – таке розбиття, за якого міра уздовж  $\Pi$  фігур  $G_i = \cap G_j$

дорівнює нулю для  $i \neq j$ . На відріжку, що є проекцією уздовж  $\Pi$  фігури  $G_i$  на вісь  $Oy$ , також є підвідрізок  $|G|$ . Тому якщо визначити на відріжку функцію  $\nu: |G| \rightarrow \square$ , що дорівнює в кожній точці кількості екстхорд

перетину прямої  $g \in |G|$  з фігурою  $G$ , то  $\sum_{i=1}^n |G_i| = \int_{|G|} \nu(g) dg$ .

Отже, для будь-якої кінцевої фігури  $G$  математичне очікування довжин екстхорд кіл

$$Mc_G = \frac{S_G}{\int_{|G|} \nu(g) dg}.$$

Для дослідження функції розподілу довжин екстхорд кіл у подвійно періодичному випадку необхідно детермінувати деякі геометричні властивості решіток фігур для цього окремого випадку.

Будемо вважати, що двовимірна площина  $\square^2$  забезпечена евклідовою метрикою. Нехай  $P$  – базисний паралелограм, суміжні сторони якого утворюють вектори  $\vec{e}_1$  і  $\vec{e}_2$ , кут між якими дорівнює  $\alpha$ . І нехай  $\bar{P}$  – решітка, побудована за паралелограмом  $P$ , будь-яка точка (вузол) якої має вигляд  $m\vec{e}_1 + n\vec{e}_2$ , де  $m, n$  – довільні цілі числа. Нехай  $F_r$  – множина кіл радіуса  $r > 0$  з центрами у вузлах решітки. Тоді будь-яка пряма на площині або перетинає нескінченну кількість кіл системи  $F_r$  (у цьому випадку довжини всіх екстхорд кіл на прямій є скінченими величинами) або не перетинає жодного кола системи  $F_r$ .

У моделі Г. Ваніна (див. рис. 3) система кіл  $F$  формується в такий спосіб. Береться решітка  $F_r$  кіл з центрами у вузлах  $\bar{P}$ . Будь-яке коло системи  $F$  утворюється подвійно періодичним  $P$ -перенесенням (тобто перенесенням на вектор  $m\vec{e}_1 + n\vec{e}_2$ ) деякого кола з центром у базисному паралелограмі  $P$ , причому жодні два кола системи  $F$  не перетинаються.

Кількість кіл системи  $F$ , центри яких належать паралелограму  $P$ , вважається скінченим. Тому будь-яка пряма  $p$  сімейства  $\Pi$  перетинає безліч  $G \in \square^2$  або за нескінченною кількістю екстхорд, або цілком належить  $G$ . Безліч прямих, що належать  $G$ , утворює подвійно періодичну  $k\vec{e}_1 + l\vec{e}_2$ -підмножину безлічі  $G$  нескінченних смуг деякої ширини. Нас буде цікавити доповнення фігури  $G$  до цих смуг.

Позначимо через  $\check{G}$  топологічне замикання доповнення до цих смуг. Розіб'ємо  $\check{G}$  на скінченну (злічену) кількість обмежених, пов'язаних і однозв'язаних фігур  $G_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Будь-яка пряма сімейства  $\Pi$  перетинає кожна з фігур  $G_i$  не більше, ніж по одній екстхорді фігури  $G$ , причому довжина відрізка перетину має змінюватися неперервно в  $G_i$ . При цьому перетин  $G = \cap G_i$  має  $\Pi$ -міру нуль (у розумінні  $|G_j| = \cap G_j = 0$ ), і розміри  $G_i$  є максимальними в разі виконання вищевказаних умов.

Множину  $G_i$  можна конструктивно описати таким чином. Будь-яка точка буде належати деякій множині  $G_i$ . Проведемо через  $x$  пряму  $q$ , що належить  $\Pi$ . Очевидно, що точка  $x$  належатиме екстхорді з  $q \cap \check{G}$ . Варіюючи пряму  $q$  у сімействі  $\Pi$  так, щоб довжина цієї екстхорди змінювалася неперервно, поєднання екстхорд, що неперервно змінюються, виберемо як фігуру, що містить точку  $x$ .

Зрозуміло, що межові екстхорди фігури  $G_i$  є дотичними до деяких кіл системи  $F$ . Якщо точку  $x$  обрано в такий спосіб, що відповідна їй екстхорда  $q \cap \check{G}$  є дотичною до деякого кола, то фігура  $G$ , що містить  $x$ , перебуває на межах цих фігур (але це на побудову фігур  $G_i$  особливого впливу не має).

Таким чином ми визначили розбиття  $|P| = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ , що задовольняє вищевказаним умовам. Можна довести, що кількість різних типів фігур у розбитті є скінченим. Якщо взяти представника  $\bar{P}$  кожного типу, то набір представників можна розбити на частини і  $k\vec{e}_1 + l\vec{e}_2$ -перенесенням «замостити» без накладень фігуру  $\check{G} \cap P$ .

Залишається додати, що для досить великих  $a$  і  $b$  в області  $\check{G} \cap \Phi(a, b)$ , де  $\Phi(a, b)$  – прямокутник зі сторонами  $a$  і  $b$ , паралельними осям координат, частота входження до кожної з фігур представників різних типів є однаковою.

Це свідчить, що на межі, коли  $a, b \rightarrow \infty$ , функція розподілу довжин екстхорд кіл подвійно періодичної системи кіл на площині є лінійною комбінацією функцій типу  $f_p(z)$ , наведених на рис. 6, в (тобто її графік має вигляд, наведений на рис. 8, що узгоджується з працею [8]). Це дає повну картину поведінки гістограм розподілу довжин екстхорд кіл для подвійно періодичних детермінованих моделей.

Вище було зазначено, що функцію  $f_p(z)$  у загальному вигляді обчислити вкрай важко. Тому запропонуємо спрощений варіант її обчислення, що дозволить описати її поведінку поблизу нуля, тобто в найбільш вірогідній області довжин екстхорд реальної структури ОВПК (див. рис. 1). Аналіз загальної ситуації дозволяє зробити висновок про те, що «внесок» цього окремого випадку в загальну картину матиме найбільшу вагу. Тому подібна апроксимація загальної функції розподілу теоретично знайденої для окремого випадку функцією розподілу  $f_p(z)$  буде цілком виправданою.

Вище зазначено, що щільність розподілу радіусів  $r$  кіл за гамма-законом системи  $F$  адекватно описує розподіл довжин хорд волокон. У свою чергу, розподіл довжин екстхорд волокон істотно залежить від розташування центрів кіл.

Нехай тепер  $P$  – ромб з кутом  $\alpha = 60^\circ$ , а  $F$  – система кіл, що не перетинаються, з центрами у вузлах  $\bar{P}$  решітки  $P$  і радіусами, розподіленими за гамма-законом. Тобто центри кіл збігаються з вузлами гексагональної решітки паралелограмів на площині (причому  $\omega_1 = \omega_2$ ). Така подвійно періодична решітка кіл має максимальну анізотропію серед усіх подвійно періодичних решіток паралелограмів [3].

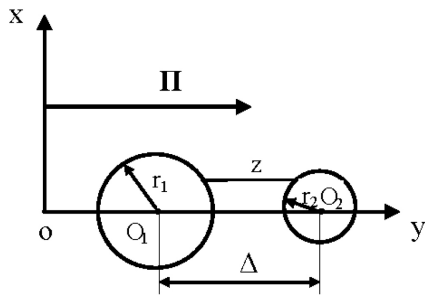


Рис. 7 – До отримання функції розподілу екстхорд

довжини  $z$ . Позначимо  $\zeta = \Delta - z$ . Тоді щільність розподілу

$$q(r_1, r_2, z_0) = k_2 \frac{\mathcal{J}^4 (r_1^2 - r_2^2)^2}{\sqrt{[(r_1^2 + r_2^2) - \mathcal{J}^2] [\mathcal{J}^2 - (r_1 - r_2)^2]}} a$$

де  $k_2 = 1/\min(2r_1, 2r_2)$ .

Нехай тепер радіуси  $r_1$  і  $r_2$  – випадкові і розподілені за законом гамма-розподілу, причому також виконується умова неперетинання радіусів  $r_1 + r_2 \leq \Delta$ . Тоді функція розподілу довжин екстхорд кіл

$$f_{\Delta}(z) = \frac{\mathcal{L}^{2\delta}}{\Gamma^2(\delta)} \iint_{\Omega(r_1, r_2)} \frac{[(\Delta - z)^4 - (r_1^2 - r_2^2)^2] (r_1 \cdot r_2)^{\delta-1} e^{-\lambda(r_1+r_2)}}{\sqrt{[(r_1^2 + r_2^2) - (\Delta - z)^2] [(\Delta - z)^2 - (r_1^2 - r_2^2)]}} dr_1 dr_2$$

де  $\Omega(r_1, r_2)$  – область інтегрування, що визначається системою  $0 \leq r_1 \leq r_2; \Delta \geq r_1 + r_2 \geq \Delta - z; r_2^2 - r_1^2 \geq (\Delta - z)^2$ .

Одержане рівняння розв'язується числовими методами.

Характер поведінки функції  $f_{\Delta}(z)$ , де  $\Delta = 2R_0 + \delta_0$ , а  $\delta_0 = 0; \pm 0,1; \pm 0,2; \dots, \pm 1$ , показаний на рис. 8, де стрілками позначено розриви функції у вертикальних асимптотах  $z_i = 2R_{0i} + \delta_0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Функція  $f_{\Delta}(z)$  має явно виражений пік при прямуванні зліва до вертикальної асимптоти ( $2R_0 + \delta_0$ ), а праворуч від неї різко зменшується до нуля. Точки  $2R_{0i}$  є точками розриву, в яких  $f_{\Delta}(z)$  прямує до нескінченності.

Далі будують експериментальні гістограми для натурального шліфу ОВПК (див. рис. 1). За отриманими експериментальним ординатами визначають теоретичну криву, наприклад у вигляді трипараметричного розподілу Г. Ваніна або розподілу довжин екстхорд кіл чи модельну криву, одержану за результатами числового експеримента.

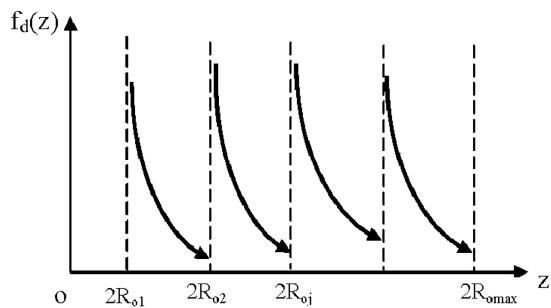
Шуканий розподіл  $f_{\Delta}(z)$  залежить від взаємного розташування кіл в ЕБК і «підганяється» під експериментальні ординати шляхом варіювання геометричних параметрів взаємного розміщення вузлових кіл в ЕБК.

Вищевказаний підхід та отримані результати можна використати для моделювання технологічних параметрів просочення ОВН полімерними зв'язуючими на стадії проектування цього процесу [14].

Не менш цікавим в теоретичному і практичному планах є дослідження стохастичного розподілу волокон в структурі ОВПК для прогнозування його напружено-деформованого стану. Проте цей напрям є темою окремих досліджень.

Нехай прямі сімейства  $\Pi$  є паралельними сторонами решітки  $P$ . Функцію розподілу довжин екстхорд кіл  $f_p(z)$  визначимо лише для двох кіл системи  $F$  з радіусами  $r_1$  і  $r_2$ , центри яких знаходяться в сусідніх вузлах решітки  $P$  (рис. 7). Нехай  $\Delta$  – відстань між центрами кіл  $r_1$  і  $r_2$ , причому  $r_1 + r_2 \leq \Delta$ , де  $\Delta$  – довжина сторони паралелограма, вибрана таким чином, щоб мінімізувати відхилення функції розподілу довжин екстхорд аналітичної залежності для геометричної моделі та експериментальної гістограми розподілу довжин екстхорд волокон у структурі поперечного шліфа ОВПК.

Нехай сімейство прямих  $\Pi$  паралельно лінії центрів кіл з радіусами  $r_1$  і  $r_2$  та висікає випадкові екстхорди випадкової



**Рис. 8 – Функція спільної щільності розподілу довжин екстхорд множини кіл, що не перетинаються**

періодичній решітці за гамма-законом, а також рівномірність розподілу паралельних випадкових січних уздовж однієї зі сторін паралелограма, визначено теоретичну функцію розподілу довжин екстхорд суміжних кіл і досліджено її поведінку поблизу характерних асимптот. Установлено, що такий розподіл залежить від взаємного розташування кіл в елементарній базовій комірці і «підганяється» під експериментальні ординати шляхом варіювання геометричних параметрів взаємного розміщення вузлових кіл у комірці.

#### Список використаної літератури

1. Кендалл М. Г. Геометрические вероятности / М. Г. Кендалл, А. П. Моран. – М. : Наука, 1972. – 192 с.
2. Сантало Л. А. Интегральная геометрия и геометрические вероятности / Л. А. Сантало. – М. : Наука, 1983. – 360 с.
3. Цыплаков О. Г. Научные основы технологии композиционно-волоконистых материалов / О. Г. Цыплаков. – Пермь, 1974. – 317 с.
4. Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов с покрытиями / Г. А. Ван Фо Фы. – К. : Наук. думка, 1971. – 232 с.
5. Ванин Г. А. Основы статистической теории волоконистых сред / Г. А. Ванин // Механика композитных материалов. – 1982. – № 6. – С. 1043–1051.
6. Ванин Г. А. К основам теории композиционных материалов с неупорядоченной структурой / Г. А. Ванин // Прикладная механика. – 1983. – Т. 19. – № 4. – С. 9–18.
7. Иванченко Ф. К. Принципы построения модели структуры в теории армированных композиционных сред / Ф. К. Иванченко, В. В. Клявлин, А. Е. Колосов // Докл. АН УССР. – Сер. А. – 1987. – № 8. – С. 25–29.
8. Колосов А. Е. Детерминирование параметров геометрической модели структуры ориентированно армированных волоконистых композитов / А. Е. Колосов, В. В. Клявлин // Механика композит. материалов. – 1987. – № 6. – С. 990–998.
9. Колосов А. Е. Некоторые аспекты детерминирования адекватной модели структуры ориентированных волоконистых композитов / А. Е. Колосов, В. В. Клявлин // Механика композит. материалов. – 1988. – № 6. – С. 1012–1019.
10. Гачяускас Э. Интегрально-геометрический метод нахождения функций распределения длины хорды овала и расстояния внутри овала / Э. Гачяускас // Литовский математический сборник. – 1968. – № 2. – С. 237–240.
11. Сіренко Г. О. Вплив параметрів розподілу вуглецевих волокон на фізико-механічні властивості композитного матеріалу на основі політетрафторетилену / Г. О. Сіренко, Л. В. Базюк // Фізика і хімія твердого тіла. – 2008. – Т. 9. – № 4. – С. 909–915.
12. Ванин Г. А. Новые функции распределения в механике композиционных сред / Г. А. Ванин // Прикладная механика. – 1984. – Т. 20. – № 5. – С. 25–31.
13. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1978. – 832 с.
14. Колосов О. Є. Одержання волоконистонаповнених реактопластичних полімерних композиційних матеріалів із застосуванням ультразвуку / О. Є. Колосов, В. І. Сівецький, О. П. Колосова. – К. : Політехніка, 2015. – 295 с.

**Висновки.** У статті розглянуто особливості використання методології теорії інтегральної геометрії та геометричних ймовірностей для дослідження розподілу відстаней (довжин «екстхорд») між суміжними колами, розташованими у вузлах подвійно періодичної решітки, що перетинаються випадковими січними. При цьому елементарна базова комірка (осередок) модельної решітки є паралелограмом зі сторонами  $\omega_1$  і  $\omega_2$  і кутом між ними  $\alpha$ , а у вузлах решітки розташовані кола радіуса  $r$ , що символізують односпрямовані волокна в перерізі полімерного композиту. Для окремого випадку  $\omega_1 = \omega_2$  і  $\alpha = 60^\circ$  у припущенні про розподіл радіусів вузлових кіл у подвійно