

## СУЧАСНИЙ СТАН ТЕОРЕТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ НАДЗВУКОВОГО ОБТІКАННЯ ТІЛ РІЗНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

*Проаналізовано методи дослідження відривних турбулентних течій та взаємодії стрибків ущільнення з пограничним шаром при надзвуковому обтіканні літальних апаратів за допомогою методів числового моделювання. Розглянуто основні математичні формулювання задач надзвукового обтікання літальних апаратів та показано, які з них доцільно використовувати для дослідження інтерференцій конфігурацій.*

**Ключові слова:** стрибок ущільнення, турбулентний пограничний шар, інтерференції конфігурацій, числове моделювання.

© Карвацький А. Я., 2015.

**Постановка проблеми.** Сучасний рівень розвитку суспільства неможливо уявити без космічних систем навколоземного базування, що призначені для забезпечення потреб зв'язку, навігації, прогнозу погоди, космічних досліджень тощо. Забезпечення потреб суспільства у таких системах передбачає розроблення нових, більш надійних, енергоефективних ракетних носіїв (літальних апаратів – ЛА) для виведення наукоємного обладнання на навколоземні орбіти. За допомогою тільки експериментальних досліджень в аеродинамічних трубах, що є надзвичайно енергоємними, цей напрям розробок забезпечити неможливо. Тому для розроблення нових ЛА широко застосовують теоретичні методи наукоємного комп'ютерного інжинірингу з використанням програмних продуктів обчислювальної гідродинаміки, що забезпечує мінімізацію тривалості робіт і значну економію матеріальних та людських ресурсів [1, 2]. При цьому дані експериментальних досліджень використовують переважно для верифікації числових моделей надзвукових турбулентних відривних потоків, що виникають в околі елементів (конфігурацій) ЛА, хоч вони й мають надзвичайно важливе самостійне значення для вивчення цієї проблеми.

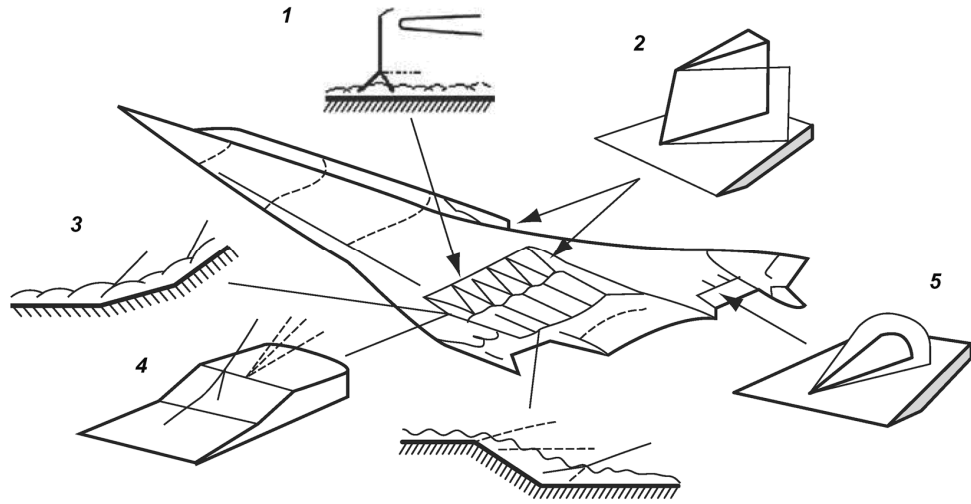
Загальною науковою проблемою є недостатній рівень досліджень різноманіття стрибків ущільнення та їхньої взаємодії з турбулентним пограничним шаром на поверхнях канонічних конфігурацій елементів ЛА (рис. 1). Дані про вплив окремих конфігурацій на формування турбулентних відривних потоків є вагомим підґрунтям для розуміння поведінки надзвукових потоків навколо ЛА в цілому. У більшості випадків відривні турбулентні потоки призводять до негативних наслідків: виникнення пікових статичних, динамічних й теплових навантажень, зростання енергетичних втрат, зменшення ефективності органів управління тощо.

Невирішеною частиною наукової проблеми є недостатність числових досліджень теплових ефектів від інтерференцій турбулентних потоків таких конфігурацій ЛА як корпус-аеродинамічний руль, корпус-перпендикулярний циліндр, корпус-газовий струмінь, що виходить перпендикулярно або під кутом до нього, корпус-клиновидна надбудова тощо.

**Метою цієї статті** є аналіз теоретичних досліджень впливу елементів конфігурацій надзвукових літальних апаратів на формування стрибків ущільнення (ударних хвиль), відривних турбулентних течій та їхню взаємодію з турбулентним пограничним шаром та між собою.

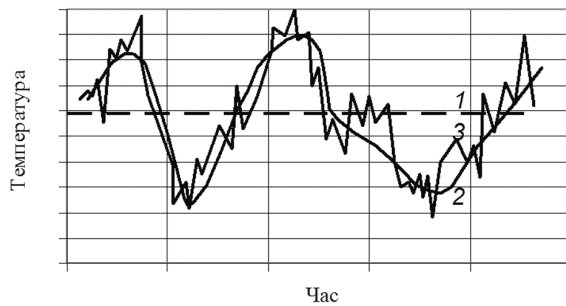
**Аналіз методів числового моделювання надзвукових відривних течій під час взаємодії ударних хвиль із турбулентним пограничним шаром та інтерференцій конфігурацій.** Основними проблемами числового моделювання широкого спектру дво- і тривимірних інтерференцій конфігурацій (ІК) за надзвукового обтікання ЛА є складність топології течій, невизначеність фізичних властивостей і відсутність строгої теорії турбулентних потоків [1]. Тому прогресу в дослідженнях і розумінні взаємодії турбулентних потоків, зокрема ІК під час надзвукового обтікання ЛА, можна досягнути тільки за поєднання детальних фізичних експериментів і числового аналізу їхньої газодинаміки на простих конфігураціях із наступним переходом на складні об'єкти [1, 4, 5].

У практиці числового моделювання взаємодії турбулентних потоків за надзвукового обтікання ЛА поряд із пошуком раціональних моделей турбулентності на базі осереднених за Reynolds або Favre рівнянь Нав'є-Стокса (Reynolds averaged Navier-Stokes equations, RANS) все більшого поширення набувають методи прямого моделювання великих вихорів або великомасштабної турбулентності (Large Eddy Simulation, LES) і безпосереднього прямого моделювання турбулентності (Direct Numerical Simulation, DNS) [6]. Різницю між ними наведено на рис. 2.



1 – прямиий стрибок; 2 – вертикальний руль; 3 – кут стискання; 4 – нахилена сходинка; 5 – усічений конус на площині

Рис. 1 – Канонічні конфігурації ЛА [1]



1 – RANS; 2 – LES; 3 – DNS

Рис. 2 – Залежність температури турбулентного потоку від часу за різних методів розрахунку

базують на таких RANS моделях: Spalart-Allmaras з одним рівнянням;  $k - \epsilon$  і  $k - \omega$  моделях із двома скалярними рівняннями [9, 10]. Обчислювальні ресурси, потрібні для реалізації моделей DES, є меншими за LES, але більшими за RANS. Із розглянутих моделей лише RANS можна використовувати для розв'язання двовимірних стаціонарних задач, решту реалізують тільки для тривимірних.

Система рівнянь Нав'є-Стокса, записана для стислого середовища, відповідає задачам ІК за надзвукового обтікання ЛА. Вона має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (cv) = 0; \\ \frac{\partial (cv)}{\partial t} + (cv \cdot \nabla)v = -\nabla p + \nabla \cdot \Phi \\ \frac{\partial (ce)}{\partial t} + \nabla \cdot [v(ce + p)] = -\nabla \cdot q + \nabla v : \Phi \\ p = cRT, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\rho$  – густина,  $\text{кг/м}^3$ ;  $t$  – час, с;  $\nabla$  – оператор Гамільтона, м;  $v$  – вектор швидкості, м/с;  $p$  – статичний тиск, Па;  $\Phi = \mu \left[ \nabla v + v \nabla - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) I \right]$  – тензор зсувних напружень другого рангу, Па;  $\mu$  – в'язкість, Па · с;  $I$  – одиничний тензор другого рангу;  $e = c_v T + v \cdot v / 2$  – повна масова енергія, Дж/кг;  $c_v$  – масова ізохорна теплоємність, Дж/(кг · К);  $T$  – абсолютна температура, К;  $q = -\lambda \nabla T$  – вектор густини теплового потоку, Вт/м<sup>2</sup>;  $\lambda$  – теплопровідність, Вт/(м · К);  $R$  – універсальна газова стала, Дж/(кг · К).

Система рівнянь (1) описує як ламінарні, так і турбулентні потоки [1]. За наявності турбулентності розв'язок (1) виходить на рівень DNS, який вже є непрактичним в обчислювальному сенсі великого масштабу інженерних конфігурацій через великі Re. Тим не менш, застосування DNS має сенс за порівняно низьких Re для кращого розуміння фізичних процесів турбулентних відривних течій. Тому для

моделювання великого масштабу інженерних конфігурацій у системі рівнянь (1) виконують заміну миттєвих значень величин статистично-середніми (рис. 2). Тобто, таким чином отримують систему рівнянь RANS. Для цього можна використати, наприклад, осереднення за Favre [6] та отримати середньозважені:

$$\tilde{f} = \frac{1}{\bar{c}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (fc)_k, \quad \tilde{f} = \frac{\overline{cf}}{\bar{c}}, \quad f = \tilde{f} + f'' \quad (2)$$

де  $f$  – миттєва величина;  $\tilde{f}$  – середня складова;  $f''$  – складова коливання;  $n$  – кількість точок осереднення.

Із використанням (2) система рівнянь (1) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{c}\tilde{v}) = 0; \\ \frac{\partial (\bar{c}\tilde{v})}{\partial t} + (\bar{c}\tilde{v} \cdot \nabla)\tilde{v} = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot T; \\ \frac{\partial (\bar{c}\tilde{e})}{\partial t} + \nabla \cdot [\tilde{v}(\bar{c}\tilde{e} + \bar{p})] = -\nabla \cdot Q + \nabla \tilde{v} : T; \\ \bar{p} = \bar{c}R\tilde{T}, \end{cases} \quad (3)$$

де тензор повних напружень і вектор повного теплового потоку визначаються співвідношеннями:

$$\begin{cases} T = -\overline{c v'' v''} + \Phi \\ Q = c_p \overline{c T'' v''} + \bar{q}. \end{cases} \quad (4)$$

У рівняннях (4) члени  $( )''$  є флуктуаціями швидкості. Для замикання системи рівнянь RANS (3) необхідно записати додаткові рівняння для визначення турбулентних напружень  $-\overline{c v'' v''}$  або напружень Re і турбулентного теплового потоку  $c_p \overline{c T'' v''}$ . За аналогією з тензором зсувних напружень для стислого середовища і законом Фур'є:

$$\begin{cases} -\overline{c v'' v''} = \mu_t \left[ \nabla v + v \nabla - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) I \right] - \frac{2}{3} c k I; \\ c_p \overline{c T'' v''} = \lambda_t \nabla T. \end{cases} \quad (5)$$

де  $\mu_t$  – турбулентна в'язкість, Па · с;  $k = (\overline{v'' \cdot v''})/2$  – кінетична турбулентна енергія, Дж/кг;  $c_p$  – масова ізобарна теплоємність, Д/(кг · К);  $\lambda_t = \mu_t c_p / Pr_t$  – турбулентна теплопровідність, Вт/(м · К);  $Pr_t$  – турбулентне число Прандтля.

Для замикання систем (3) і (5) необхідно оцінити турбулентну в'язкість  $\mu_t$ . Для цього існує три класичних підходи [11]: алгебраїчний вираз (модель Prandtl), що не потребує додаткового рівняння балансу; одне (модель Spalart-Allmaras) і два скалярних рівняння.

Для задач числового моделювання взаємодії між стрибком ущільнення і пограничним шаром за надзвукового обтікання ЛА найбільшого застосування дістали моделі турбулентності  $k - \epsilon$  Launder [9] і  $k - \omega$  Wilcox [10] та їхні варіації.

Другим наближенням у числовому аналізі надзвукового обтікання ЛА є LES (рис. 2), система рівнянь якої отримують за допомогою середньої за простором функції, що відповідає середній за Favre  $\tilde{f}$  :

$$\tilde{f} = \frac{1}{V} \int_V G f dV, \quad \tilde{f} = \frac{\overline{cf}}{\bar{c}}, \quad (6)$$

де  $G$  – функція-фільтр.

У LES великі турбуленції визначаються явно, тоді як ефект менших моделюють за допомогою підсіткових правил замикання. Рівняння балансу для моделювання великих вихорів отримують шляхом фільтрації миттєвих рівнянь балансу. LES визначає миттєве положення «великого» масштабу вирішеного фронту течії, але підсіткова модель все ще необхідна, щоб взяти до уваги ефекти малих турбулентних масштабів. У LES система рівнянь Нав'є-Стокса з урахуванням (6) має вигляд (3). Відмінність між записами полягає у визначенні тензора повних напружень і вектора повного теплового потоку:

$$\begin{cases} T = -\bar{c} \left( \tilde{v} \tilde{v} - \tilde{v} \tilde{v} \right) + \Phi \\ Q = \bar{c} c_p \left( \tilde{T} \tilde{v} - \tilde{T} \tilde{v} \right) + \bar{q}. \end{cases} \quad (7)$$

де  $-\bar{c} \left( \tilde{v}v - \tilde{v}\tilde{v} \right)$  і  $\bar{c}c_p \left( \tilde{T}v - \tilde{T}\tilde{v} \right)$  – підсіткові масштаби напружень і теплового потоку. Для їхнього визначення запропоновано два наближення: перше використовує явну модель для SGS напруження й теплового потоку [12]; друге – неявний метод із використанням монотонного інтегрування [13].

Повне математичне формулювання задачі надзвукового обтікання ЛА на прикладі стандартної моделі турбулентності  $k - \omega$  для в'язкого середовища [10, 14], в якій враховано вплив малих чисел  $Re$  і стисливість рідини, має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{c}\tilde{v}) = 0; \\ \frac{\partial (\bar{c}\tilde{v})}{\partial t} + (\bar{c}\tilde{v} \cdot \nabla)\tilde{v} = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot \bar{\Phi}_{eff}; \\ \frac{\partial (\bar{c}k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{c}k\tilde{v}) = \nabla \cdot \left[ \left( m + \frac{M_t}{y_k} \right) \nabla k \right] + G_k - Y_k + S_k; \\ \frac{\partial (\bar{c}\omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{c}\omega\tilde{v}) = \nabla \cdot \left[ \left( m + \frac{M_t}{y_\omega} \right) \nabla \omega \right] + G_\omega - Y_\omega + S_\omega; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{c}\tilde{E}) + \nabla \cdot \tilde{v} (\bar{c}\tilde{E} + \bar{p}) = \nabla \cdot \left[ \left( l + \frac{c_p M_t}{Pr_t} \right) \nabla \tilde{T} \right] + \nabla \tilde{v} : \bar{\Phi}_{eff} + q_v, \\ \bar{p} = \bar{c}R\tilde{T}, \end{array} \right. \quad (8)$$

де  $k$  – турбулентна кінетична енергія, Дж/кг;  $\omega$  – відносна швидкість дисипації кінетичної енергії турбулентності,  $c^{-1}$ ;  $m_t = \bar{b}^* \frac{ck}{\omega}$  – турбулентна в'язкість, Па · с;  $\bar{b}^*$  – коефіцієнт ослаблення  $\mu_t$  (корекції) для

малих  $Re$ ;  $\bar{b}^* = \bar{b}_0^* \left( \frac{\bar{b}_0^* + Re_t / R_k}{1 + Re_t / R_k} \right)$ ,  $Re_t = \frac{ck}{\omega \nu}$ ,  $\bar{b}_0^* = \frac{B_i}{3}$ , для великих  $Re$   $\bar{b}^* = \bar{b}_\infty^* = 1$ , тоді  $m_t = \frac{ck}{\omega}$ , як у

*D. Wilcox*;  $G_k = m_t S^2$  – джерело турбулентної кінетичної енергії за рахунок середнього градієнта швидкості, яке визначають за гіпотезою Boussinesq, Вт/м<sup>3</sup>;  $S = \sqrt{2S : S}$  – модуль тензора середньої швидкості деформації,  $c^{-1}$ ;  $S = (\nabla V + V \nabla) / 2$  – тензор швидкості деформації,  $c^{-1}$ ;  $G_\omega = \bar{b} \frac{\omega}{k} G_k$  – джерельний член для  $\omega$

, кг/(м<sup>3</sup> · с<sup>2</sup>) (для малих  $Re$ ,  $\bar{b} = \frac{\bar{b}_0}{\bar{b}^*} \left( \frac{\bar{b}_0 + Re_t / R_\omega}{1 + Re_t / R_\omega} \right)$ , для великих  $Re$   $\alpha = \alpha_\infty = 1$ );  $Y_k = c v_b^* f_b^* k \omega$  –

дисипативний член для  $k$ , Вт/м<sup>3</sup> ( $f_b^* = \begin{cases} 1 & \chi_k \leq 0; \\ \frac{1 + 680\chi_k^2}{1 + 400\chi_k^2} & \chi_k > 0; \end{cases}$  де  $\chi_k = \frac{1}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega$ ,  $v_b^* = v_i^* \left[ 1 + \alpha F(M_t) \right]$ ,

$v_i^* = v_\infty^* \left[ \frac{4/15 + (Re_t / R_b)^4}{1 + (Re_t / R_b)^4} \right]$ , за великих  $Re$   $v_i^* = v_\infty^*$ , для нестиского середовища  $v_i^* = v_i^*$ );  $Y_\omega = c v_b^* \omega^2$  –

дисипативний член, кг/(м<sup>3</sup> · с<sup>2</sup>) ( $f_b = \frac{1 + 70\chi_\omega}{1 + 80\chi_\omega}$ ,  $\chi_\omega = \frac{(\omega \nabla \omega) : S}{(v_\infty^* \omega)^3}$ ,  $S = (\nabla V - V \nabla) / 2$ ,  $c^{-1}$ ,  $\beta = \beta_i \left[ 1 - \frac{B_i^*}{B_i} \alpha_i F(M_t) \right]$ );

$F(M_t) = \begin{cases} 0 & M_t \leq M_{t0}; \\ M_t^2 - M_{t0}^2 & M_t > M_{t0}; \end{cases}$  – функція стисливості середовища, яку використовують для корекції

стисливості ( $M_t^2 = 2k/a^2$  – турбулентне число Mach,  $a = \sqrt{\gamma RT}$  – швидкість звуку, м/с;  $\gamma$  – показник адиабати;  $S_k, S_\omega$  – джерельні члени для рівнянь  $k$  і  $\omega$ , відповідно;  $\tilde{E} = \tilde{h} - \frac{\bar{p}}{\bar{c}} + \frac{\tilde{v} \cdot \tilde{v}}{2}$  – масова повна енергія,

Дж/кг;  $\tilde{h} = \int_{T_0}^{\tilde{T}} c_p dT$  – масова ентальпія, Дж/кг;  $\bar{\Phi}_{eff} = (m + m_t) \left[ \nabla \tilde{v} + \tilde{v} \nabla - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{v}) I \right] - \frac{2}{3} \bar{c} k I$  – тензор девіаторних

напружень, Па;  $q_v$  – густина об'ємного джерела теплоти, Вт/м<sup>3</sup>.

Коефіцієнти стандартної  $k - \omega$  моделі турбулентності (8):

$$\alpha_\infty^* = 1; \alpha_\infty = 0,52; \bar{b}_0 = 1/9; \bar{b}_\infty^* = 0,09; \beta_i = 0,072; R_\beta = 8; \zeta^* = 1,5; R_k = 6; R_\omega = 2,95; M_{t0} = 0,25; \sigma_k = 2,0; \sigma_\omega = 2,0.$$

Початкові умови:

$$\tilde{T}(X) = T_0; \quad \tilde{v}(X) = v_0; \quad \bar{p}(X) = p_0; \quad k(X) = k_0; \quad e(X) = e_0, \quad (9)$$

де  $X(x, y, z) \in \Omega$  – декартові координати, м;  $\Omega$  – розрахункова область.

Межові умови:

на вході газового потоку

$$n \cdot \tilde{v} = v_{inlet}; \quad \bar{p} = p_{inlet}; \quad \tilde{T} = T_{inlet}; \quad k = k_{inlet}; \quad e = e_{inlet}, \quad (10)$$

де  $n$  – вектор нормалі до поверхні;

на виході газового потоку:

$$\bar{p}_{outlet} = 0; \quad \tilde{T} = T_{outlet}; \quad k = k_{outlet}; \quad e = e_{outlet}, \quad (11)$$

на поверхні профілю ЛА

$$n \cdot \nabla \bar{p} = 0; \quad n \cdot \nabla \tilde{T} = 0; \quad \tilde{v} = 0; \quad k = 0; \quad \omega = 0. \quad (12)$$

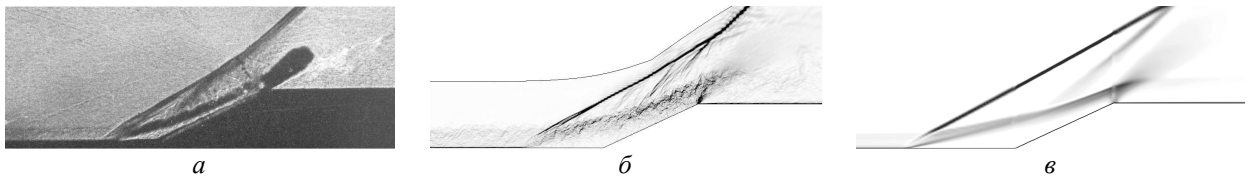
У разі використання DES моделі  $Y_k = \text{sw}^* k \omega F_{DES}$ , де  $F_{DES} = \max\left(\frac{L_t}{C_{DES} D_{\max}}, 1\right)$ ;  $L_t = \frac{\sqrt{k}}{\omega}$  – довжина

шляху перемішування турбулентних потоків, що визначаються за RANS моделлю, м;  $C_{DES} = 0,61$  – константа калібрування DES моделі;  $D_{\max} = \max(D_x, D_y, D_z)$  – максимальний локальний крок сітки, м [15].

Для числової реалізації розглянутих математичних моделей ІК за надзвукового обтікання ЛА можна застосовувати як комерційні програмні продукти, наприклад ANSYS (Fluent, CFX) [16], так і відкритий програмний код OpenFOAM (Open Field Operation and Manipulation) [17].

**Результати числового аналізу та їхнє порівняння з експериментом.** З використанням програмного коду OpenFOAM розроблено модель для числового аналізу надзвукового обтікання нахиленої сходинок, що реалізує стандартну  $k - \omega$  модель турбулентності (8)–(12). Результати тестових розрахунків, їхнього порівняння з експериментом і даними числового експерименту з використанням LES моделі наведено на рис. 3.

Аналіз даних свідчить, що  $k - \omega$  модель турбулентності (рис. 3, в) у загальних рисах відтворює картину граничного шару, стрибків ущільнення, зону відриву турбулентного потоку, отриманих в експерименті (рис. 3, а), але для дослідження більш тонких ефектів, пов'язаних із взаємодією стрибків ущільнення, наприклад інтерференції конфігурацій VI типу за класифікацією Edney [1] у вигляді віяла хвиль розрідження, що виходять із трійної точки  $\lambda$ -конфігурації [3], варто скористатися більш складними LES (рис. 3, б) або DES моделями.



а – експеримент – тепловське фото [2]; б – модель LES [1, 2];  
в – модель RANS  $k - \omega$  стандартна (наші дані)

**Рис. 3 – Поле градієнта густини повітря за надзвукового обтікання нахиленої сходинок**

**Висновки.** Проведено аналіз теоретичних досліджень впливу елементів конфігурацій надзвукових літальних апаратів на формування стрибків ущільнення, відривних турбулентних течій та їхню взаємодію з турбулентним пограничним шаром і між собою. Розглянуто математичні формулювання задач надзвукового обтікання літальних апаратів DNS, LES, RANS і гібридні LES/RANS, що отримали назву DES. На прикладі порівняння результатів, отриманих за допомогою числової моделі нахиленої сходинок, що побудована на основі RANS моделі турбулентності, показано, що для дослідження інтерференцій конфігурацій слід користуватися більш складними LES або DES моделями.

**Перспективи подальших досліджень.** Числовий аналіз теплових ефектів від інтерференцій турбулентних потоків за різних конфігурацій ЛА з урахуванням теплового випромінювання та хімічної взаємодії.

#### Список використаної літератури

1. Babinsky H. Shock Wave–Boundary–Layer Interactions / Holger Babinsky, John K. Harvey. – New York : Cambridge University Press, 2011. – 461 p.
2. Желтоводов А. А. Закономерности развития и возможности численного моделирования сверхзвуковых турбулентных отрывных течений / А. А. Желтоводов // Авиационно-космическая техника и технология. – 2012. – № 5 (92). – С. 95–107.

3. Экспериментальное и численное исследование гиперзвукового отрывного течения в окрестности конуса с “юбкой” / И. А. Бедарев, А. А. Маслов, А. А. Сидоренко и др. // Прикладная механика и техническая физика. – 2002. – Т. 43. – № 6. – С. 100–112.
4. Borovoi V. Ya. Gas Flow Field and Heat Exchange in the Zones of Shock Waves Interactions with a Boundary Layer / V. Ya. Borovoi. — Moscow : Mashinostroenie, 1983. – 141 p. (in Russian).
5. Smits A. J. Turbulent Shear Layers in Supersonic Flow / A. J. Smits, J. P. Dussauge. – New York : Springer Science + Business Media Inc, 2006. – 367 p.
6. Poinsot T. Theoretical and numerical combustion / Thierry Poinsot, Denis Veynante. – Philadelphia : Edwards, 2005. – 522 p.
7. Inflow boundary conditions for hybrid large eddy–Reynolds averaged Navier-Stokes simulation / X. Xiao, J. R. Edwards, H. A. Hassan, R. A. Baurle // AIAA J. – 2003. – Vol. 41. – No 8. – P. 1418–1489.
8. Edwards J. R. Large-eddy/Reynolds-averaged Navier-corner interaction / J. R. Edwards, J.-L. Choi, J. A. Boles // AIAA J. – 2008.– Vol. 46. – No 4. – P. 977–991.
9. Jones W. P. The prediction of laminarization with a 2-equation model of turbulence / W. P. Jones, B. E. Launder // Int. J. of Heat and Mass Transfer. – 1972. – No 15. – P. 301–314.
10. Wilcox D. C. Turbulence Modeling for CFD / David C. Wilcox.– California : DCW Industries, Inc, 1993. – 460 p.
11. Математичне моделювання та експериментальні дослідження складного теплообміну при рості кристалів / В. І. Дешко, А. Я. Карвацький, Ю. В. Лохманець та ін. – Х. : Ін-т сцинтиляційних матеріалів, 2012. – 248 с.
12. Toward the large eddy simulation of compressible turbulent flows/ G. Erlebacher, M. Hussaini, C. Speziale, T. Zang // J. Fluid Mech. –1992. – Vol. 238. – P. 1550–1585.
13. Grinstein F. Implicit Large Eddy Simulation / F. Grinstein, L. Margolin, W. Rider. – New York : Cambridge University Press, 2007.
14. A New  $k$ - $\varepsilon$  Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows. Model Development and Validation / T.-H. Shih, W. W. Liou, A. Shabbir et al. // Computers Fluids. – 1995. – 24. – No. 3. – P. 227–238.
15. Menter F. Ten Years of Experience with the SST Turbulence Model / F. Menter, M. Kuntz, R. Langtry // Turbulence, Heat and Mass Transfer 4 / eds K. Hanjalic, Y. Nagano, M. Tummers. – Begell House Inc., 2003. – P. 625–632.
16. ANSYS, ANSYS FLUENT. ANSYS CFX – Режим доступу : <http://www.ansys.com> (дата звернення 11.03.15).
17. The OpenFOAM Foundation. – Режим доступу : <http://www.openfoam.org> (дата звернення 11.03.15).

Надійшла до редакції 17.02.2015

---