

УДК 66.06

СОКОЛЬСЬКИЙ О. Л. \*, КУРЧ А. В., ОЛЕКСИШЕН В. О.  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

## ВРАХУВАННЯ ЕФЕКТУ ДИСИПАЦІЇ ПІД ЧАС ОБРОБЛЕННЯ В'ЯЗКИХ РЕЧОВИН

Неньютонівські рідини мають велике значення в багатьох промислових секторах, таких як харчова промисловість та виробництво синтетичних полімерів. Реологічна реакція неньютонівських рідин є досить складною, включаючи поєднання в'язких та пружних ефектів та нелінійних явищ. У разі оброблення високов'язких речовин суттєвий вплив на процес та розподіл властивостей речовини у часі та просторі мають ефекти дисипації та пристінного ковзання. Дослідницька робота спрямована на виявлення раніше ігнорованих миттєвих впливів в'язкої дисипації на споживання електроенергії, швидкість технологічних процесів, якість продукції та загальну продуктивність обладнання хімічної промисловості, зокрема, обладнання для перекачування та змішування в'язких неньютонівських рідин. У статті представлено математичне формулювання та основні аспекти, пов'язані з моделюванням неізотермічного потоку за допомогою пакету програмного забезпечення для числового моделювання CFD «Ansys Fluent». Результати математичного моделювання були перевірені фізичним експериментом у ротаційному віскозиметрі типу «циліндр-циліндр». Експериментальне дослідження підтвердило числове моделювання та показало, що протягом 5 хвилин обробки температура робочої речовини збільшилася на 6 °C через в'язку дисипацію енергії. Показано, що гідрофобізація та модифікуючі фрикційні добавки впливатимуть на рівень дисипативного нагрівання речовин.

**Ключові слова:** неньютонівська рідина, в'язкість, дисипація, пристінне ковзання, енергоефективність

**DOI:** 10.20535/2617-9741.4.2025.348821

\* Corresponding author: o.sokolskiy@kpi.ua

Received 03 September 2025; Accepted 09 October 2025

**Постановка проблеми.** Обробка неньютонівських рідин, зокрема, в'язкопружних розплавів, розчинів і суспензій, є ключовим кроком у визначенні характеристик та якості готової продукції в полімерній та харчовій промисловості. Тому розуміння та моделювання в'язкопружних потоків має фундаментальне значення в цих галузях. Реологічна реакція неньютонівських рідин є досить складною, включаючи поєднання нелінійних в'язких та пружних ефектів, таких як в'язкість, що залежить від швидкості деформації, наявність різниці нормальних напружень у зсувних потоках, явища релаксації та ефекти пам'яті [1, 2]. Зміни температури та в'язкості можуть негативно вплинути на якість кінцевого продукту, особливо в харчовій та нафтохімічній промисловості. Особливо це стосується термочутливих органічних речовин. Контроль та регулювання пристінного тертя шляхом хімічної або структурної модифікації поверхонь обладнання (гідрофобізації) і додавання модифікуючих тертя домішок дозволить впливати на рівень дисипативного розігріву речовин. У високов'язких рідинах під час ламінарної течії низьков'язкі нерозчинні з ними рідкі домішки видавлюються на периферію потоку і не змішуються з основним потоком.

**Аналіз попередніх досліджень.** У спеціальній літературі загальною науковою проблемою є числовий аналіз неньютонівських потоків з використанням однієї або кількох нелінійних диференціальних моделей. В усіх цих роботах, незалежно від методу дискретизації (методу скінченних елементів, скінченних різниць або скінченного об'єму), ітераційного методу розв'язання чи конститутивних рівнянь, що використовуються, невирішеною частиною наукової проблеми є так звана «проблема високих чисел Вайсенберга» (HWNP). HWNP полягає у складності досягнення збіжності при високих числах Вайсенберга ( $We$ ) або Дебори ( $De$ ), де безрозмірні числа  $We$  та  $De$  є співвідношеннями між характерним часом релаксації полімеру та характерним часом течії. Чим вище число Вайсенберга (або Дебори), тим більш виражений ефект пружності. У спробі розв'язати проблему високої в'язкопружності (HWNP) або мінімізувати її вплив було запропоновано багато стратегій та специфічні числові методології, що пов'язують імпульс та конститутивні в'язкопружні рівняння [3–6].

Ще одним важливим аспектом аналізу в'язкопружних потоків є розробка програмного забезпечення, спеціально розробленого для цієї мети. Незважаючи на великий обсяг літератури з моделювання

в'язкопружної поведінки та моделювання в'язкопружних потоків, більшість комерційних пакетів, призначених для аналізу полімерних потоків та операцій обробки полімерів, таких як екструзія та лиття під тиском, фактично обмежуються описом чисто в'язких неньютонівських явищ. Розробка та використання програмного забезпечення з можливостями аналізу в'язкопружних потоків досі здійснюється майже виключно в академічних середовищах для конкретних застосувань.

Будучи добре перевіреним та широко використовуваним пакетом CFD, у цьому контексті пакет *Ansys Fluent* [7] видається перспективним інструментом для такого роду розробки.

Для цього розроблено числову методологію, для обробки проблеми високої в'язкопружності та будь-яких диференціальних конститутивних рівнянь.

Суттєвий вплив на розподіл швидкостей, напружень, а отже й температур у оброблюваному середовищі мають умови, що реалізуються на межі між ним та твердими конструктивними елементами обладнання. Часто ці умови відрізняються від умови прилипання, що найчастіше застосовується у розрахунках.

**Метою** статті є дослідження взаємозалежностей змін швидкості потоку, в'язкості неньютонівських рідин та специфічних граничних умов засобами обчислювальної гідродинаміки.

Об'єкт дослідження – вплив дисипації на потік неньютонівських в'язких рідин в технологічних процесах.

Предмет дослідження – методи оброблення в'язких рідин в умовах дисипації кінетичної енергії потоку.

**Методика роботи.** У роботі представлено математичне формулювання та основні аспекти, пов'язані з моделюванням неізотермічної течії у пакеті *Ansys Fluent*. Результати математичного моделювання верифіковано натурним експериментом у ротаційному віскозиметрі типу «циліндр-циліндр».

**Виклад основного матеріалу.** Існують різні моделі ковзання, засновані на залежності коефіцієнта тертя від швидкості або напруження зсуву на стінці та моделі, отримані з молекулярно-кінетичної теорії [8–10].

Нелінійний закон ковзання Нав'є [11] припускає залежність коефіцієнту тертя від напруження зсуву у формі нелінійної степеневі функції

$$v_w = \text{sign}\left(\frac{dv}{dy}\right) k(\tau_{xy})^{m-1} \tau_{xy}, \quad (1)$$

де  $m > 0$ . При  $m = 1$  закон перетворюється на лінійний закон ковзання Нав'є.

Це нелінійна модель використана для представлення експериментальних даних для течій Куетта і Пуазейля [11, 12] і забезпечує прийнятне наближення, але не описує швидкість ковзання в діапазонах критичного напруження зсуву, при якому починається ковзання [9]. Для усунення цієї невідповідності, Хатзікіріакос (Hatzikiriakos) запропонував альтернативний закон ковзання на основі теорії в'язкої рідини Ейрінга, щоб забезпечити плавний перехід від відсутності ковзання до ковзання в потоці при критичних напруженнях зсуву [9].

Нехай  $\tau_c$  – критичне напруження, при якому починається ковзання, а  $k_1, k_2 \geq 0$ , тоді закон ковзання Хатзікіріакоса

$$v_w = \begin{cases} k_1 \sinh \left[ k_2 \left( \text{sign} \left( \frac{dv}{dy} \right) \tau_{xy} \right) - \tau_c \right] & , \text{при } \tau_{xy} \geq \tau_c \\ 0 & , \text{при } \tau_{xy} < \tau_c, \end{cases} \quad (2)$$

Асимптотичний закон ковзання

$$\tau = -\frac{1}{k_2} \left[ 1 - \exp \left( \frac{v}{k_1} \right) \right],$$

для одновимірного потоку вираз може бути записаний у вигляді функції швидкості ковзання

$$v_w = k_1 \ln \left[ 1 + k_2 \left( \text{sign} \left( \frac{dv}{dy} \right) \tau_{xy} \right) \right] \quad (3)$$

Для асимптотичного закону ковзання та закону Хатзікіріакоса коефіцієнти  $k_1$  і  $k_2$  дозволяють співставити величину ковзання і форму кривої залежності напруження зсуву від швидкості на стінці з отриманими експериментальними даними.

Для течій Пуазейля і Куетта граничні умови ковзання можна записати в загальному вигляді як для верхньої  $(+h)$ , так і для нижньої  $((-h)$  стінки.

$$\operatorname{ing} v(-h) = -k_i \mu \tau_{xy}$$

Рівняння імпульсу

$$\frac{d}{dy} \left( \eta(\gamma) \frac{dv}{dy} \right) = \frac{dp}{dx},$$

де  $p$  – імпульс.

Інтегруванням рівняння імпульсу отримуємо

$$\tau = p_x y + C, \quad (4)$$

де  $C$  – константа інтегрування.

Об'єднанням рівнянь (4), (1), (3) для всіх досліджених законів ковзання можна виразити загальний вигляд граничних умов на верхній і нижній стінках.

Для нелінійного закону ковзання Нав'є ( $m = 1$  для лінійного закону ковзання Нав'є)

$$v(h) = k_1(-p_x h - C)^m,$$

$$v(-h) = k_2(-p_x h + C)^m.$$

Для закону ковзання Хатзікіріакоса

$$v(h) = k_1 \sinh[k_2(-p_x h - C)],$$

$$v(-h) = k_3 \sinh[k_4(-p_x h + C)].$$

Для асимптотичного закону ковзання

$$v(h) = k_1 \ln[1 + k_2(-p_x h - C)],$$

### Математична модель

Згідно сформульованої фізичної моделі процесу, математичну модель неізотермічного руху розплаву полімеру в каналі можна представити системою рівнянь, яка включає рівняння нерозривності, нестационарні рівняння збереження кількості руху та енергії [13]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \\ \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}; \\ \rho \left[ \frac{\partial v h}{\partial t} + \nabla (v h) \right] = \nabla \cdot [\lambda(T) \nabla T] + \bar{\bar{\tau}} : \nabla \mathbf{v}, \end{cases} \quad (5)$$

де  $\nabla$  – оператор Гамільтона,  $\text{м}^{-1}$ ;  $\mathbf{v}$  – вектор швидкості,  $\text{м} / \text{с}$ ;  $t$  – час,  $\text{с}$ ;  $\rho$  – густина,  $\text{кг} / \text{м}^3$ ;  $p$  – зовнішній гідростатичний тиск,  $\text{Па}$ ;  $\bar{\bar{\tau}} = 2\eta(\dot{\gamma})\dot{\mathbf{D}}$  – тензор в'язких напружень другого рангу,  $\text{Па}$ ;  $\dot{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla)$  – тензор швидкості деформації,  $\text{с}^{-1}$ ;  $\eta(\dot{\gamma})$  – в'язкість рідини як функція другого інваріанта  $\dot{\gamma}$  від  $\dot{\mathbf{D}}$ ,  $\text{Па} \cdot \text{с}$ ;  $\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}}}$  – другий інваріант від  $\dot{\mathbf{D}}$ ,  $\text{с}^{-1}$ ;  $h = \int_0^T C_p(T) dT$  – явна масова ентальпія,  $\text{Дж} / \text{кг}$ ;  $C_p$  – масова ізобарна теплоємність,  $\text{Дж} / (\text{кг} \cdot \text{К})$ ;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності,  $\text{Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$ ;  $\bar{\bar{\tau}} : \nabla \mathbf{v}$  – член, що відповідає дисипації механічної енергії,  $\text{Вт} / \text{м}^3$ ;  $T$  – абсолютна температура,  $\text{К}$ ;  $:$  – оператор подвійного скалярного добутку.

Згідно Нав'є, за наявності ковзання руху рідини протидіє сила, пропорційна відносній швидкості між рідким шаром і твердою стінкою. Пристинні ефекти на стінці описуються по узагальненому закону Нав'є [14]

$$\tau = -F_{slip} \cdot |\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_w|^{e_{slip}} \quad (6)$$

де  $\mathbf{v}_s$  – тангенціальна компонента швидкості течії,  $\text{м} / \text{с}$ ;  $\mathbf{v}_w$  – тангенціальна компонента швидкості стінки,  $\text{м} / \text{с}$ ;  $F_{slip}$  – коефіцієнт ковзання (тертя) на поверхні каналу,  $\text{кг} / (\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;  $e_{slip}$  – параметр матеріалу.

Закон в'язкості з урахуванням його температурної залежності для різних класів рідин має вигляд

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = \eta(\dot{\gamma}, T_0)H(T),$$

де  $\dot{\gamma}$  – другий інваріант  $\dot{D}$ ,  $\text{с}^{-1}$ ;  $H(T) = \exp\left(\frac{E_a}{RT_a}\left(\frac{1}{T-T_0} - \frac{1}{T_0-T_a}\right)\right)$ ;  $E_a$  – енергія активації течії, Дж / моль;  $R$  – газова стала, Дж / (моль · К);  $T_a$  – абсолютна температура активації, К;  $T_0$  – абсолютна температура відліку, К.

В'язкість вираховується за формулою

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + (\lambda\dot{\gamma})^m}, \quad (7)$$

де  $\eta_0$  – в'язкість розплаву полімеру за мінімальної швидкості зсуву, Па · с;  $\lambda$  – час релаксації, с;  $\dot{\gamma}$  – швидкість зсуву,  $\text{с}^{-1}$ ;  $n$  – степеневий індекс;  $m = 1 - n$ .

#### Числовий алгоритм дослідження даних

Дослідження нестационарної задачі течії нелінійно в'язких рідин можна розбити на такі кроки, як явні розрахунки градієнта тиску та дивергенції напружень для заданих початкових полів швидкості, тиску і напруження з наступним неявним розв'язанням рівняння імпульсу для кожної компоненти вектора швидкості; оцінка поля тиску для нових значень швидкості з наступною корекцією швидкості до відповідності рівнянню нерозривності; розв'язання основного рівняння для розрахування поля тензора напружки для скоригованого поля швидкості.

Після чого попередні кроки можна повторювати рекурсивно для отримання уточнених рішень в перехідних потоках, оновлюючи щоразу значення швидкості, тиску й напруження.

#### Геометрія та умови потоку

Як тестову геометрію обрано віскозиметр з коаксіальними циліндрами («циліндр – циліндр»). Досліджувана рідина перебуває в зазорі між нерухомим та обертовим циліндрами. Швидкість обертання ротора визначає швидкість зсуву, а в'язкість вираховується з обертового моменту. Схему експериментальної установки наведено на рис. 1. На плиті 1 розміщена вертикальна стойка 2, на якій закріплено тримачі 3.

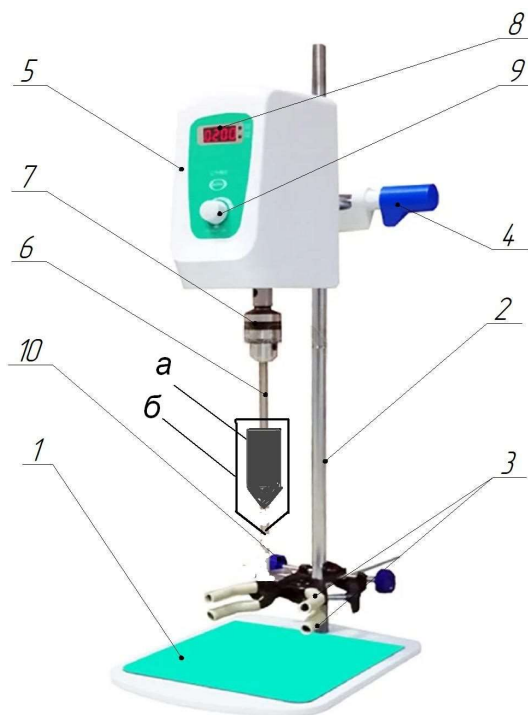


Рис. 1 – Схема ротаційного віскозиметра

Тримачі 3 закріплюють і центрують коаксимальний зазор, який утворюється між циліндричними поверхнями ротора *a* та вимірювального циліндра *б*.

Затискач 4 слугує для кріплення або вивільнення корпусу 5, що дозволяє змінювати висоту установки та виймати вал 6 з ротором *a* з циліндра. Вал 6 закріплюється у патроні 7.

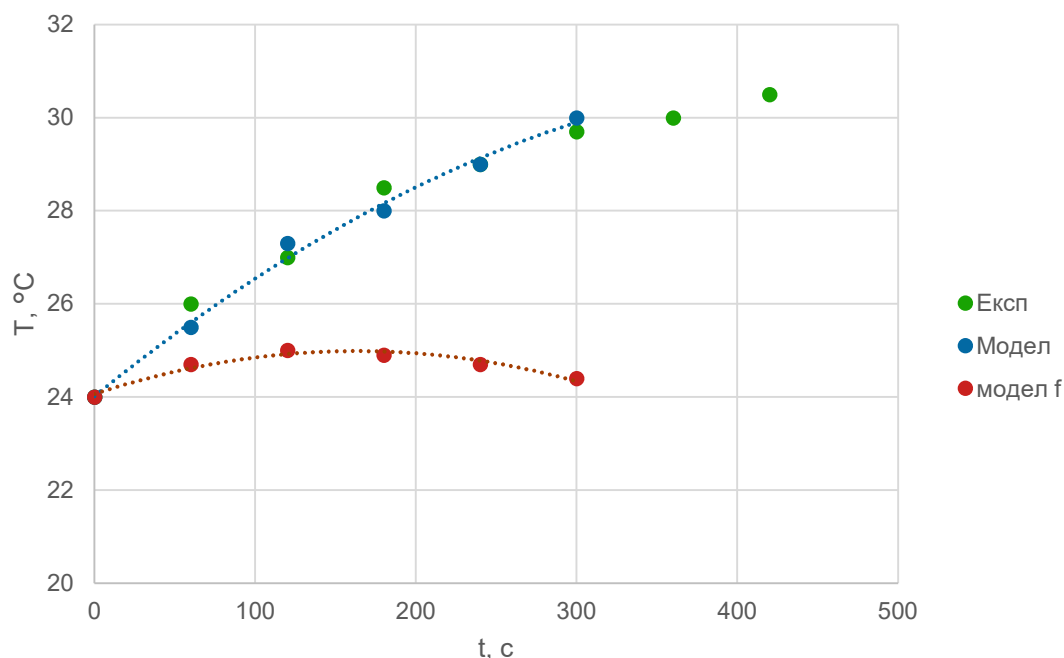
Електродвигун, який обертає вал з ротором, розміщено у корпусі 5 установки, також на ньому розміщено табло 8 для зняття показників швидкості обертання і регулятор 9 для їх регулювання.

Потужність знімається за допомогою цифрового ватметра (на фото не показано), який розміщується поруч з установкою і підключений до неї. Передбачено можливість вертикального переміщення тримачів 3 по вертикальній стійці 2 за допомогою затискача 10.

Як модельну досліджувану речовину було використано зубну пасту, яка являє собою водну дисперсію. Оброблення здійснювалось за умови постійної швидкості зсуву, яка дорівнювала  $300 \text{ c}^{-1}$ . Температура навколишнього середовища становила  $24^\circ\text{C}$ . За таких умов розрахована з експерименту в'язкість пасти становила  $0,78 \text{ Па}\cdot\text{с}$ . Коефіцієнт тепловіддачі у навколишнє середовище становив за розрахунками

$$\alpha = 30 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}}$$

Експериментальне дослідження, підтверджене числовими розрахунками у середовищі *Ansys Fluent*, показує, що протягом 5 хв оброблення температура пасти підвищилась через дисипацію на  $6^\circ\text{C}$  (див. рис. 2, серії Експ та Модел).



**Рис. 2 – Зростання температури у досліджуваній рідині в ротаційному віскозиметрі**

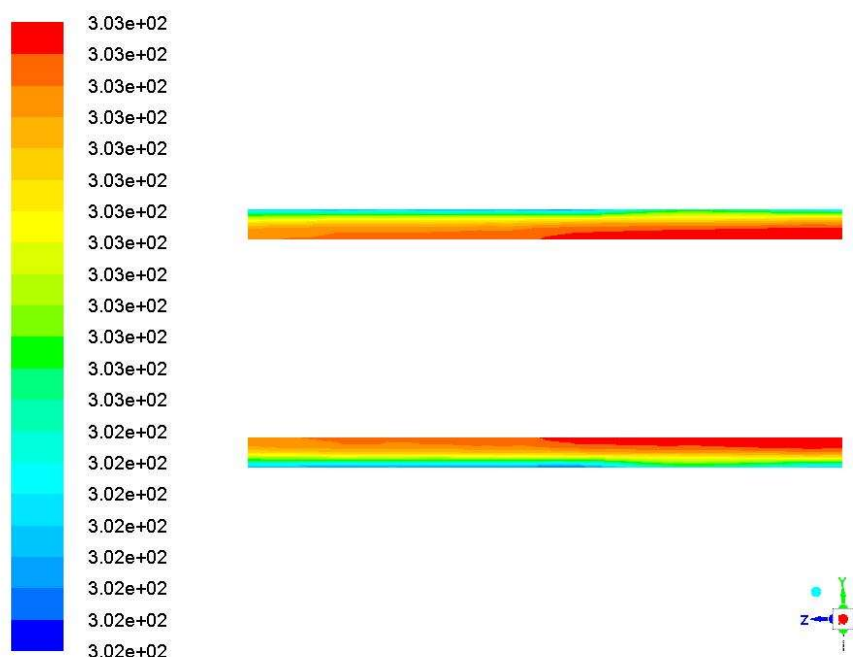
Модель геометрії циліндричної зони віскозиметра та розподіл температур після 5 хвилин оброблення показано на рис. 3 та 4.

У разі застосування умови проковзування (6) на стінці, що симулює гідрофобне покриття робочих органів або накладання ультразвукових коливань на ротор, ефект дисипації стає незначним (в межах  $1^\circ\text{C}$ ). Розрахункову зміну температур у часі за таких умов відображає крива Модел *f* на рис. 2.

Під час оброблення в'язких середовищ, чутливих до підвищення температури, врахування ефекту дисипації набуває важливого значення. Зниженню зазначеного ефекту сприяє застосування покриттів або інших умов на межі з твердими стінками та робочими органами обладнання, що знижує прилипання до них оброблюваної рідини.



**Рис. 3 – Модель геометрії циліндричної зони віскозиметра**



**Рис. 4 – Результати числових досліджень – розподіл температур в К після 5 хв оброблення**

**Висновки.** У разі оброблення високов'язких речовин суттєвий вплив на процес та розподіл властивостей речовини у часі та просторі мають ефекти дисипації та пристінного ковзання. Як показують результати моделювання і натурний експеримент, під час оброблення рідини в'язкістю  $0,78 \text{ Па}\cdot\text{с}$  з швидкістю зсуву, яка дорівнювала  $300 \text{ с}^{-1}$ , підвищення температури за 5 хв склало  $6^\circ\text{C}$ . Водночас за умови наявності пристінного ковзання, що в моделюванні імітує наявність тонкого змащувального шару або гідрофобного покриття робочих елементів, підвищення температури за той же час склало лише  $1^\circ\text{C}$ . Це дає змогу стверджувати, що гідрофобізація і додавання модифікуючих тертя домішок дозволить впливати на рівень дисипативного розігріву речовин.

**Перспективи подальших досліджень.** Задача подальших досліджень передбачає проведення натурних експериментів з оброблення в'язких речовин в апаратурі з гідрофобним покриттям та змащувальним шаром.

**Список використаної літератури**

1. Byron Bird R., Armstrong R.C., Hassager O. Dynamics of polymeric liquids / Nashville, TN: John Wiley & Sons, 1987.
2. Macosko Ch.W. Rheology / Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag, 1994. 576 p.
3. Perera M.G.N., Walters K. Long-range memory effects in flows involving abrupt changes in geometry // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2.1. 1977, p. 49–81.
4. Rajagopalan D., Armstrong R.C., Brown R.A. Finite element method for calculation of steady, viscoelastic flow using constitutive equations with a Newtonian viscosity // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 36. 1990, p. 159–192.
5. Gu'ennette R., Fortin M. A new mixed finite element method for computing viscoelastic flows // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 60.1. 1995, p. 27–52.
6. Sun J., Phan-Thien N., Tanner R.I. An adaptive viscoelastic stress splitting scheme and its applications: AVSS/SI and AVSS/SUPG // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 65.1. 1996, p. 75–91.
7. ANSYS Polyflow User's Guide / ANSYS. 2024.
8. Schowalter W.R. The behavior of complex fluids at solid boundaries // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 29. 1988, p. 25–36.
9. Hatzikiriakos S. A Slip Model for Linear Polymers Based on Adhesive Failure // International Polymer Processing Journal of the Polymer Processing Society 8. 1993, p. 135.
10. Joshi Y.M., Lele A.K., Mashelkar R.A. Slipping fluids: a unified transient network model // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 89.3. 2000, p.
11. Thompson P.A., Troian S.M. A general boundary condition for liquid flow at solid surfaces // Nature 389.6649. 1997, p. 360–362.
12. F.M.P.A.R. Committee. Modern developments in fluid dynamics: an account of theory and experiment relating to boundary layers, turbulent motion and wakes v.2. / Dover Publications, Incorporated, 1965.
13. Карвацький А. Я., Чемерис А. О. Механіка суцільних середовищ. Конспект / КПІ ім. Ігоря Сікорського; – Електрон. текст. дані. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 215 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/72094>
14. Gerbeau J.-F., Lelièvre T. Generalized navier boundary condition and geometric conservation law for surface tension // Computer methods in applied mechanics and engineering. 2009. vol. 198, issues 5–8. p. 644–656.

---

**Oleksandr Sokolskyi, Andrii Kurch, Vitalii Oleksyshen**

**CONSIDERATION OF THE DISSIPATION EFFECTS DURING THE PROCESSING OF VISCOUS SUBSTANCES**

*The scope of proposed research is the effects of viscous dissipation of non-Newtonian liquid flow kinetic energy on the electric equipment exploitation modes in liquid processing industry.*

*Viscous dissipation, affecting the speed of processes, can cause an increase or decrease in energy consumption, and therefore, is an important factor in the transportation and processing of viscous liquids. Dissipation of viscous liquid flow's kinetic energy into thermal form can cause change of operational characteristics of processing equipment in any industry involving liquid transfer, because of unpredictable changes in energy consumption and productivity of processing devices occur. Neglecting viscous dissipation effects can lead to economically irrational design of pipelines, processing equipment and pumping systems, that would reduce their overall economic efficiency. Changes in temperature and viscosity can negatively affect the quality of outcome product, especially in the food and petroleum industries. Appropriate consideration of those factors would allow to reduce costs, increase efficiency and ensure proper product quality.*

*The research work is aimed on finding previously neglected instant effects of viscous dissipation on electric energy consumption, speed of technological processes, quality of product and general productivity of equipment of chemical industry, particularly, equipment for pumping and mixing of viscous non-Newtonian fluids.*

*The article presents a mathematical formulation and the main aspects related to modeling non-isothermal flow using "Ansys Fluent" CFD numeric modelling software package. The results of the mathematical modelling have been verified by a physical experiment in a rotational viscometer of the 'cylinder-cylinder' type.*

*The experimental study confirmed the numerical modelling and showed that during 5 minutes of processing, the temperature of the working substance increased by 6°C due to viscous dissipation of energy.*

*In the case involving wall slip simulating a hydrophobic coating of working parts or the application of ultrasonic vibrations on the rotor, the dissipation effect looks negligible within 1°C range. But in the case of the processing of viscous media sensitive to temperature increase, effects of viscous dissipation becomes significant. The reduction of these effect is facilitated by the use of coatings or other conditions at the interface with solid walls and working parts of the equipment, which reduces the adhesion of the processed liquid to them.*

*In the case of high-viscosity substances processing, the effects of viscous dissipation and wall slip significantly affect the process and the distribution of properties of the substance over time and space. As demonstrated by the modelling outcomes and physical experiment data, during the processing of a fluid with a viscosity of 0.78 Pa·s at a shear rate of 300 s<sup>-1</sup>, the temperature increase over 5 minutes was 6 °C. At the same time, at wall slip, which in the numerical model imitates the thin-layer lubrication or hydrophobic coating on the working elements, the temperature increase over the same period was only 1°C. This leads us to assertion that hydrophobization and modifying friction additives will influence the level of dissipative heating of substances.*

*The task of further research involves physical experiments on the processing of viscous substances in equipment with hydrophobic coating and various lubricating layers.*

**Keywords:** *non-newtonian fluid, viscosity, dissipation, slip, energy efficiency*

### **References**

1. Byron Bird R., Armstrong R.C., Hassager O. (1987), “Dynamics of polymeric liquids”, Nashville, TN: John Wiley & Sons. 670 p.
2. Macosko Ch.W. (1994), “Rheology”, Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag, 576 p.
3. Perera M.G.N., Walters K. (1977), “Long-range memory effects in flows involving abrupt changes in geometry”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2.1., p. 49–81.
4. Rajagopalan D., Armstrong R.C., Brown R.A. (1990) “Finite element methods for calculation of steady, viscoelastic flow using constitutive equations with a Newtonian viscosity”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 36, p. 159–192.
5. Gu'ennette R., Fortin M. (1995) “A new mixed finite element method for computing viscoelastic flows”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 60.1., p. 27–52.
6. Sun J., Phan-Thien N., Tanner R.I. (1996) “An adaptive viscoelastic stress splitting scheme and its applications: AVSS/SI and AVSS/SUPG”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 65.1., p. 75–91.
7. “ANSYS Polyflow User's Guide”, ANSYS. 2024.
8. Schowalter W.R. (1988) “The behavior of complex fluids at solid boundaries”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 29., p. 25–36.
9. Hatzikiriakos S. (1993) “A Slip Model for Linear Polymers Based on Adhesive Failure”, *International Polymer Processing Journal of the Polymer Processing Society* 8., p. 135.
10. Joshi Y.M., Lele A.K., Mashelkar R.A. (2000) “Slipping fluids: a unified transient network model”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 89 (3)., p. 303–335
11. Thompson P.A., Troian S.M. (1997) “A general boundary condition for liquid flow at solid surfaces”, *Nature* 389.6649., p. 360–362.
12. F.M.P.A.R. Committee (1965) “Modern developments in fluid dynamics: an account of theory and experiment relating to boundary layers, turbulent motion and wakes v.2.”, Dover Publications, Incorporated. 406 p.
13. Karvatsky, A. Ya., Chemerys, A. O. (2024). *Mekhanika sutsilnykh seredovyshch. Konspekt [Mechanics of continuous media. Abstract] Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute; – Electronic text data. Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute*, 215 p. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/72094>
14. Gerbeau J.-F., Lelièvre T. (2009) “Generalized navier boundary condition and geometric conservation law for surface tension”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*. vol. 198, issues 5–8. p. 644—656. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.09.011>.