

УДК 62-477:001.894.2-023.811-025.53-049.7(048.83)

МІКУЛЬОНОК І. О.^{1,2*}, ЛУКІНЮК М. В.¹

¹ Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

² Інститут газу Національної академії наук України

ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ СТРІЧКИ МЕБІУСА (Огляд)

Однією з найважливіших характеристик різноманітних машин, апаратів, пристроїв і конструкцій, а також їхніх елементів є геометрична форма, що особливо проявляється в машинобудуванні, аеро- й гідродинаміці, тепло- й масообміні. Одним з геометричних об'єктів, що мають унікальні властивості, є стрічка Мебіуса (смужка, лист, кільце, петля Мебіуса) – топологічний об'єкт, який є найпростішою неорієнтованою поверхнею з однією стороною та одним краєм. Основною перевагою стрічки Мебіуса є саме наявність у ній однієї поверхні, що достатньо широко використовується в найрізноманітніших сферах людського життя, і насамперед у техніці й технології. Стрічка Мебіуса знайшла своє застосування в машино- та приладобудуванні, на транспорті, в хімічній технології й споріднених галузях промисловості, теплоенергетиці, відновлюваній енергетиці, будівництві, легкій промисловості, сільському господарстві, аерокосмічній і військовій техніці, електроніці, радіотехніці, комп'ютерній техніці, медицині, рекламній та ювелірній справах, сфері розваг і відпочинку, засобах особистої гігієни, а також у побуті. У розробленні інноваційних технічних рішень використання стрічки Мебіуса в різних галузях економіки та побуті може надати суттєву допомогу не лише наявний більше як півтора столітній досвід науковців, інженерів і винахідників у цьому питанні, але й унікальні можливості штучного інтелекту.

Ключові слова: топологія, геометричні фігури, неорієнтована поверхня, одностороння поверхня, стрічка Мебіуса, інженерія, прикладне застосування

DOI: 10.20535/2617-9741.2.2025.333973

*Corresponding author: i.mikulionok@kpi.ua

Received 06 April 2025; Accepted 24 April 2025

Постановка проблеми. Однією з найважливіших характеристик елементів різноманітних машин, апаратів, пристроїв і конструкцій є їхня геометрична форма. Особливого значення форма твердих тіл відіграє в аеро- і гідродинаміці [1, 2], теплообміні [3–5], масообміні [6–9], а також у конструктивно-технологічному оформленні інших процесів хімічної, харчової, мікробіологічної, нафтохімічної, нафтопереробної та споріднених з ними галузях промисловості [10–15].

Одним з можливо не дуже привабливих на вигляд, але дивовижних з точки зору властивостей геометричних об'єктів є стрічка Мебіуса (смужка, лист, кільце, петля Мебіуса) – топологічний (тобто неперервний) об'єкт, який є найпростішою неорієнтованою поверхнею з однією стороною та одним краєм.

Основною перевагою стрічки Мебіуса є саме її «односторонність», і саме ця її властивість достатньо широко використовується в найрізноманітніших сферах людського життя, і насамперед у техніці й технології.

Аналіз попередніх досліджень

...На запитання «Скільки поверхонь має аркуш письмового паперу?» на особу, що ставить таке дивне запитання, можуть подивитися з деякою підозрою, адже кожна розсудлива людина знає, що аркуш має дві поверхні – лицьову та зворотну.

Тим не менше, якщо два протилежні краї паперового листа з'єднати між собою, взаємно повернувши їх при цьому на 180°, то отримаємо дивний результат: звичайний двосторонній плоский аркуш перетвориться на замкнену об'ємну односторонню поверхню – так званий лист Мебіуса (рис. 1) [16].

В унікальності цього, можливо, на перший погляд і не зовсім привабливого об'єкта (насамперед з точки зору симетрії), досить легко переконатися. Для цього потрібно просто взяти ручку або олівець і, не відриваючи стрижня або грифеля від поверхні стрічки, провести позовжню безперервну лінію доти, доки вона не досягне вихідної точки. Потім, переконавшись, що лінія виконана, наприклад, на «верхній» поверхні стрічки, подивіться на його «нижню» поверхню – лінія буде й там, тобто потрапити з однієї точки цього об'єкта до будь-якої іншої можна, не перетинаючи його краю!



Рис. 1 – Стрічка (лист) Мебіуса

Іншими словами, якщо рухатися вздовж стрічки Мебіуса, не перетинаючи її границь, то, на відміну від двосторонніх поверхонь, наприклад, сфери або циліндра, можна потрапити у вихідне місце, опинившись у перевернутому положенні порівняно з початковим. Цей разючий ефект тісно пов'язаний з неорієнтованістю стрічки Мебіуса: якщо помітити на ній невелике коло з фіксованим напрямом його обходу (наприклад, за годинниковою стрілкою) і рухати його вздовж стрічки Мебіуса, не перетинаючи її границь, то можна дійти початкового положення так, що напрям обходу кола зміниться на протилежний (відповідно проти годинникової стрілки).

Оскільки стрічка Мебіуса обмежена всього лише однією замкненою лінією, то в разі розрізання цієї стрічки по середній лінії вона не розпадеться на дві частини, а замість очікуваних двох стрічок Мебіуса вийде одна довга двостороння (удвічі більше закручена, ніж традиційна стрічка Мебіуса). Якщо після цього отриману «двічі закручену» стрічку розрізати вздовж посередині, то утворюються дві стрічки, намотані одна на одну.

Якщо розрізати стрічку Мебіуса, відступаючи від краю приблизно на третину її ширини, то виходять дві стрічки, одна – коротша, а інша – довга стрічка Мебіуса з двома півобертами («афганська стрічка»).

Інші комбінації стрічок можуть бути отримані зі стрічок з двома або більш півобертами в них. Наприклад, якщо розрізати стрічку з трьома півобертами, то вийде стрічка, завита у вузол трилисника. Розріз стрічки з додатковими оборотами дає несподівані фігури, названі парадоксними кільцями.

Одним із способів представлення стрічки Мебіуса як підмножини тривимірного простору є параметризація (див. також [17]):

$$\begin{aligned}x(u, v) &= \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos(u); \\y(u, v) &= \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin(u); \\z(u, v) &= \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2},\end{aligned}$$

де $0 \leq u < 2\pi$ та $-1 \leq v < 1$.

Ці залежності задають стрічку Мебіуса ширини 1, чие центральне коло має радіус 1, лежить у площині x – y з центром у точці $(0, 0, 0)$. Параметр u рухається вздовж стрічки, тоді як параметр v задає відстань від краю.

У циліндричних координатах (r, θ, z) , необмежену версію стрічки Мебіуса може бути представлено рівнянням

$$\log(r) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = z \cos\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

де функція логарифма має довільну основу.

Вважається, що стрічку Мебіуса відкрили 1858 року незалежно один від одного німецький геометр, механік та астроном Август Фердинанд Мебіус (також – Мьобіус; нім. *August Ferdinand Möbius*; 1790–1868) [18], а також німецький математик і фізик Йоганн Бенедикт Лістінг (нім. *Johann Benedict Listing*; 1808–1882) [19]. Точніше ними було не стільки відкрито цей геометричний об'єкт, скільки досліджено його властивості, адже його зображення зустрічаються ще в римській мозаїці 200–250 рр. н. е. (рис. 2) [20].



**Рис. 2 – Бог вічного часу Еон у зодіакальному колі (у вигляді стрічки Мебіуса)
і Гея в оточенні персоніфікацій чотирьох пір року,
(греко-римська мозаїка, III ст. н. е., Гліптотека, м. Мюнхен, Німеччина)**

Проте стрічка Мебіуса знайшла своє застосування не стільки у мистецтві, скільки в різних галузях промисловості та інших сферах людської діяльності.

Метою статті є критичний аналіз використання стрічки Мебіуса в техніці, технології й побуті.

Виклад основного матеріалу.

Стрічка (лист) Мебіуса – це неорієнтована поверхня, у якій ейлерова характеристика дорівнює нулю, а край є замкненою лінією. У тривимірному евклідовому просторі стрічка Мебіуса є односторонньою хіральною поверхнею [21, 22]. При цьому в евклідовому просторі існують два типи смуг Мебіуса залежно від напрямку закручування: праві й ліві (хоча топологічно вони є такими, що не розрізняються).

Іншими словами, на відміну від традиційної двосторонньої стрічки з лицьовою та оборотною поверхнями, стрічка Мебіуса є односторонньою, що використовується для виготовлення різних засобів промислового й побутового призначення й насамперед елементів технологічного та допоміжного обладнання хімічної, харчової, нафтопереробної, теплоенергетичної та споріднених з ними технологій. При цьому зазначені елементи знайшли застосування у всіх основних процесах технології: механічних, гідромеханічних, теплових, масообмінних і хімічних [23]. Отже, першими, хто оцінив дивовижні властивості стрічки Мебіуса, стали інженери й винахідники, які запропонували численні надзвичайно ефективні технічні рішення.

Одним з перших технічних рішень з використанням стрічки Мебіуса стала запатентована ще 11 грудня 1885 року пасова передача для передачі крутного моменту між двома валами, у тому числі й розташованими під прямим кутом один до одного (пат. DE38782C; рис. 3).

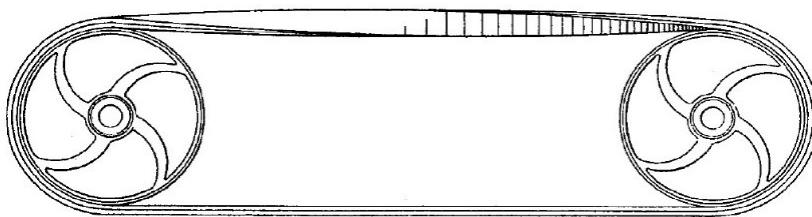
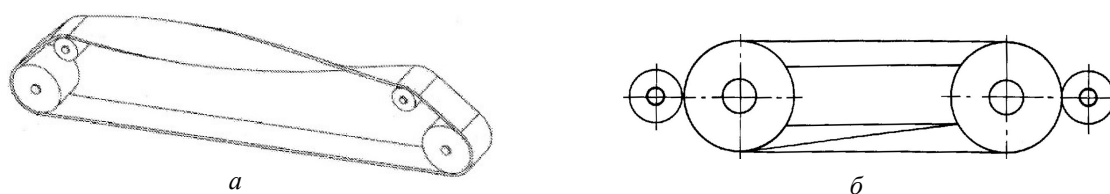


Рис. 3 – Плоскопасова передача (пат. DE38782C)

Дещо вдосконалені аналогічні плоскопасові передачі наведено в пат. JPS63210453A, RU2047022C1, RU2303727C1, CN106481757A, CN107269783A, при цьому для запобігання перекуренню паса на ведучому й веденому шківів використовують напрямні (пат. CN107269783A; рис. 4,а) або притискні ролики (пат. RU2050489C1; рис. 4,б).

Запропоновано паси з поперечним перерізом у вигляді квадрата, правильних трикутника, п'яти- та шестикутника (пат. RU2050489C1), трапеції (пат. RU2097622C1), ромба зі зрізаними вершинами, а також три- і шестипроменевих зірок (пат. US4253836A, DE202004005763U1, RU2071003C1; рис. 5).



a – пат. CN107269783A; *б* – пат. RU2050489C1

Рис. 4 – Плоскопасові передачі з напрямними (*a*) і притискними (*б*) роликками

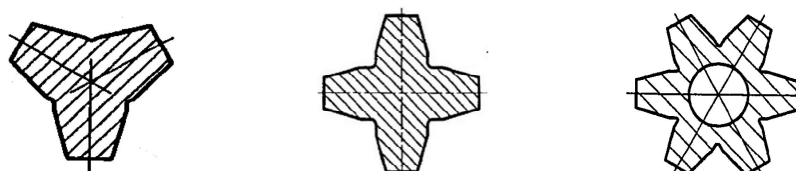


Рис. 5 – Варіанти поперечного перерізу паса пасової передачі (пат. DE202004005763U1)

Крім того, розроблені паси з поперечним перерізом у вигляді квадрата та правильного трикутника зі зрізаними вершинами (пат. US4058022A). Також розроблено багатошаровий плоский приводний пас підвищеної міцності та зносостійкості (пат. US3995506A). При цьому плоскопасова передача для підвищення зчеплення паса з шківом може мати зубчастий пас (пат. DE202004005763U1; рис. 6).

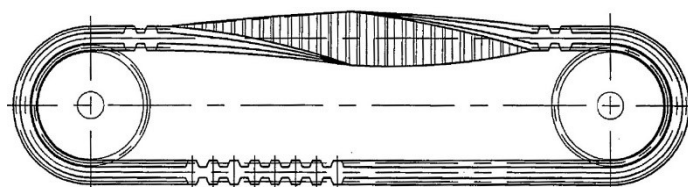
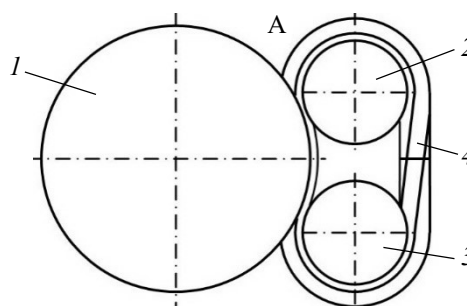


Рис. 6 – Плоскопасова передача із зубчастим пасом (пат. DE202004005763U1)

Привідний пас у вигляді стрічки Мебіуса з поперечним перерізом у вигляді правильного п'ятикутника з кутом скрутки сусідніх ребер 72° (пат. RU2208726C1). Виконана по всій довжині паса гвинтова канавка збільшує його гнучкість і поліпшує охолодження під час роботи.

Пасова передача, що містить три шків, а також виконаний у вигляді стрічки Мебіуса приводний пас з поперечним перерізом у вигляді правильного багатокутника з парною кількістю сторін, при цьому пас встановлено на шківів з можливістю контакту з двома з них своєю внутрішньою, а з одним – зовнішньою поверхнею (пат. UA107566U; рис. 7). Зазначене технічне рішення також може бути застосоване як валковий подрібнювач для руйнування сировини у виробництві будівельних матеріалів, при цьому пас призначений не лише для передавання крутного моменту між валками, а й фіксації подрібнюваної сировини на ділянці між валками грубого й тонкого подрібнення (пат. RU2571059C1).



A – зона завантаження подрібнюваної сировини; *1* – спільний валок; *2* – валок грубого подрібнення;
3 – валок тонкого подрібнення; *4* – притискний пас

Рис. 7 – Пасова передача – валковий подрібнювач (пат. UA107566U, RU2571059C1)

Також запропоновані плоскі полірувальна (пат. US6217427B1) і шліфувальні стрічки (пат. CN104907905A, а. с. SU1787756A1). Для підвищення стабільності розташування шліфувальної стрічки в просторі привідні шківів оснащуються ребордами (пат. CN104907905A; рис. 8).

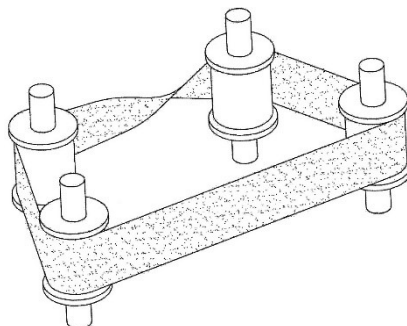


Рис. 8 – Плоскошліфувальний пристрій (пат. CN104907905A)

Для збільшення терміну служби та запобігання перегріву шліфувальної стрічки розроблено стрічки з поперечним перерізом у вигляді правильних багатокутників (трикутника, квадрата, шестикутника; а. с. SU324137A1). В останньому разі під час виготовлення кожної зі стрічок кінці заготовки перед з'єднанням їх у кільце повертають на одну грань, тим самим у кілька разів збільшуючи робочу поверхню ремня. Однак такі паси мають істотний недолік – зі збільшенням кількості граней зменшується їхня ширина, а отже й продуктивність шліфування. Тому наступним кроком у цьому напрямку став винахід «зірчастого» шліфувального пасу (традиційні шківів при цьому також довелось дещо змінити; а. с. SU745665A1).

Загальним недоліком наведених виконаних у вигляді стрічки Мебіуса деталей машин і інструментів (привідних пасів, шліфувальних і полірувальних стрічок, стрічкових пилок), незважаючи на збільшення довжина їхньої робочої поверхні не менше ніж удвічі, є наявність знакозмінних навантажень, що діють на нескінченний стрічковий інструмент, знижують його надійність і термін служби.

Надзвичайно компактний плоский фільтр містить нескінченне фільтрувальне полотно у вигляді листа Мебіуса, що огинає три пари напрямних роликів (пат. JP2015042939A; рис. 9).

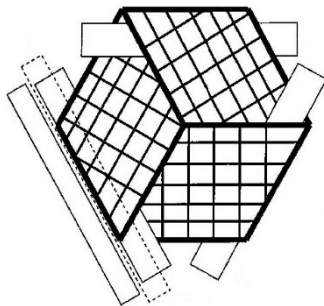


Рис. 9 – Фільтрувальний елемент (вид у плані; пат. JP2015042939A)

У стрічковому фільтрі робочий елемент виконано у вигляді стрічки Мебіуса (пат. JP2010184447A).

У барабанному вакуумному фільтрі нескінченне фільтрувальне полотно, що частково охоплює барабан, виконане у вигляді стрічки Мебіуса зі скрученою за межами барабана ділянкою (а. с. SU452364A1). Полотно такої форми не тільки збільшує термін служби робочої поверхні, але й підвищує ефективність роботи фільтра (за рахунок поліпшення регенерації фільтрувального полотна). Аналогічне рішення запропоновано в рулонному фільтрі (пат. RU67469U1), пристрої очищення й регенерації фільтрувального полотна рулонного фільтра (пат. RU47252U1), а також в газовому фільтрі (а. с. SU784893A1).

Очишувач повітря холодильника з фільтрувальним елементом аналогічної форми запропоновано в пат. KR100675385B1.

Також згорнуту у вигляді листа Мебіуса іонообмінну мембрану для очищення забрудненої води запропоновано як робочий елемент барабанного вакуумного іонообмінного фільтра (пат. RU97058U1; рис. 10).

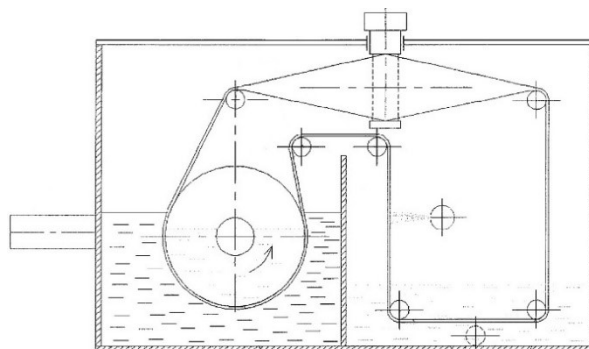


Рис. 10 – Схема барабанного вакуумного іонообмінного фільтра (пат. RU97058U1)

Просіювальний елемент гідрофронта для розділення пісчано-гравійної суміші на пісок і гравій виконано у вигляді сітчастої стрічки Мебіуса (а. с. SU1304908A1).

У стрічковому конвеєрі (транспортері) для сипких або поштучних матеріалів, у тому числі гарячих, нескінченну стрічку виконано у вигляді стрічки Мебіуса зі скрученою ділянкою на холостій гілці конвеєрної стрічки (пат. US2784834A, JPS63282053A, CN108674886A, CN203268977U, CN217554864U, CN219708095U, RU2250189C2, RU2347025C2, заявка GB2373777A; рис. 11). В аналогічному конвеєрі вантажонесучий орган у поперечному перерізі виконано у вигляді зірки з рівномірно розташованими в коловому напрямку щонайменше трьома променями (а. с. SU908673A1).

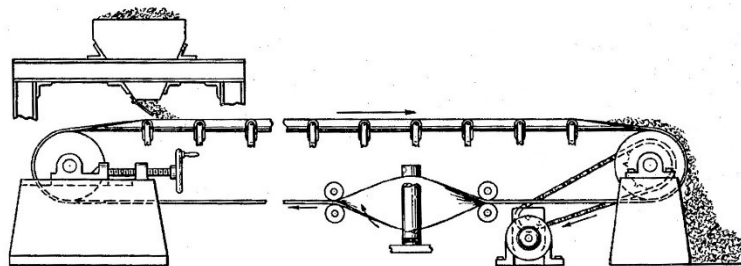


Рис. 11 – Схема стрічкового конвеєра для транспортування сипких матеріалів (пат. US2784834A)

У тягово-транспортальному пристрої транспортований сипкий матеріал або поштучні вироби затискаються між двома плоскими гілками двох нескінченних стрічок Мебіуса, розташованих як у горизонтальній (транспортер; пат. JPS63282054A), так і у вертикальній площині (елеватор; пат. JPH0428609A; рис. 12).

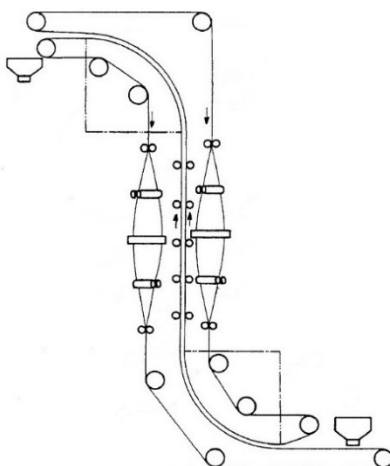


Рис. 12 – Схема стрічкового елеватора (пат. JPH0428609A)

Пристрій для сортування сипких матеріалів за розміром частинок на фракції містить пару роликів з рівномірно виконаними по довжині кожного з них кільцевими канавками й розташованими в цих канавках замкненими гнучкими елементами, при цьому в напрямку руху верхньої гілки зазначених елементів відстань між сусідніми елементами збільшується для реалізації методу грохочення від меншого до більшого [23, 24] (пат. UA73873U). Кожен із зазначених елементів виконано з відрізка дроту за допомогою нероз'ємного з'єднання між собою його торців з кутовим зміщенням один відносно одного. Замкнені елементи в поперечному перерізі можуть мати різну форму: у вигляді кола, еліпса, правильного багатокутника тощо. Виконання робочих елементів пристрою у вигляді стрічки Мебіуса забезпечує рівномірне зношування їхньої поверхні, що збільшує термін служби зазначених елементів і пристрою в цілому.

Перфорована стрічка Мебіуса призначена для транспортування в пресі плодово-ягідної сировини й відтискання з неї соку (а. с. SU1761786A1).

У пристрої для виготовлення скляних кульок робочою поверхнею формувального інструменту у вигляді стрічки Мебіуса, на відміну від більшості інших технічних рішень з її використанням, є не плоска ділянка стрічки, а скручена (а. с. SU1164216A1). У цьому пристрої краплі скломаси надходять усередину циліндричної труби зі скрученою всередині неї ділянкою стрічки Мебіуса і під час руху стрічки рівномірно обкочуються нею по внутрішній поверхні труби, поступово набуваючи круглої форми (рис. 13). Аналогічну конструкцію та принцип дії має й тістоокруглювальна машина (а. с. SU1005748A1).

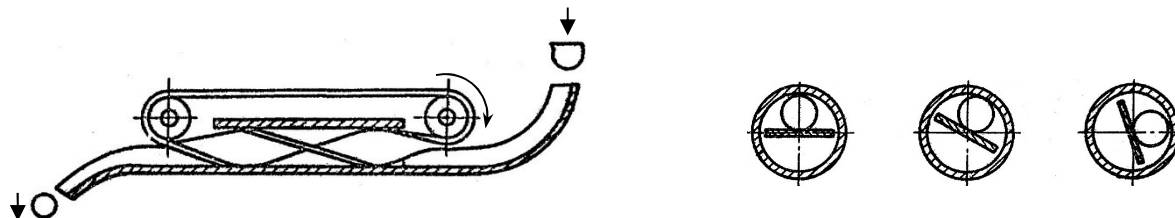


Рис. 13 – Схема пристрою для виготовлення скляних кульок і послідовність їх формотворення(а. с. SU1164216A1)

Змішувачі для сипких і пастоподібних матеріалів містять горизонтальний короб з розміщеним уздовж нього валом, оснащеним розташованими по гвинтовій лінії кільцями у вигляді стрічок Мебіуса (а. с. SU1308503A2, пат. UA61345A). Змішувачі характеризуються високою ефективністю та низькою матеріалоємністю.

Теплообмінний апарат типу «труба в трубі» містить дві труби, розташовані одна в іншій, при цьому зовнішню трубу виконано у вигляді тора, а другу – порожнистої стрічки Мебіуса з еліптичним поперечним перерізом (пат. RU2504723C1; рис. 14) Незважаючи на компактність, низьку матеріалоємність і високу ефективність, цей теплообмінник характеризується складністю виготовлення.

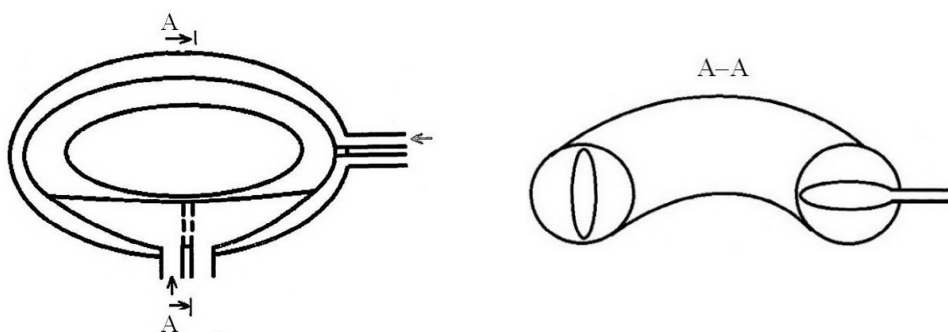


Рис. 14 – Теплообмінний апарат (пат. RU2504723C1)

Пристрій для виробництва полімерних плівок з розчину методом поливу [25] на перфоровану конвеєрну стрічку у вигляді стрічки Мебіуса, що завдяки використанню поверхні стрічки між барабанами не лише на верхній вітці, а й на нижній істотно підвищує продуктивність пристрою (а. с. SU766883A1; рис. 15).

Крім робочих органів технологічного обладнання елементи, виконані у вигляді стрічки Мебіуса, використовуються як допоміжні компоненти зазначеного обладнання, а також під час його виготовленні.

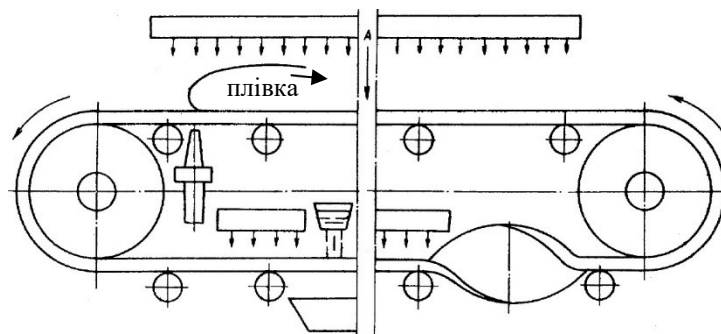


Рис. 15 – Пристрій для виробництва полімерних плівок з розчину методом поливу (а. с. SU766883A1)

Також для розрізання різних матеріалів, і насамперед сортового й профільного прокату, у вигляді стрічки Мебіуса використовують стрічкову пилку з різальними зубцями на збільшеному вдвічі краї стрічки (пат. US4189968A, JPH0938823A, JPH0938824A, JPH0938825A, а. с. SU719586A1; рис. 16). Розроблено і дротяну пилку у вигляді стрічки Мебіуса із закріпленими на дроті дискретними різальними втулками (пат. KR20130055759A; рис. 17).

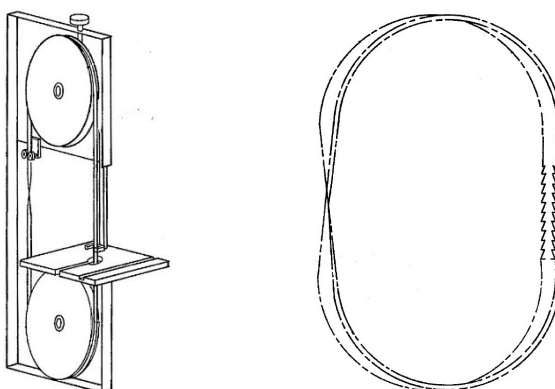


Рис. 16 – Пристрій для пиляння та стрічкова пилка до нього (пат. US4189968A)

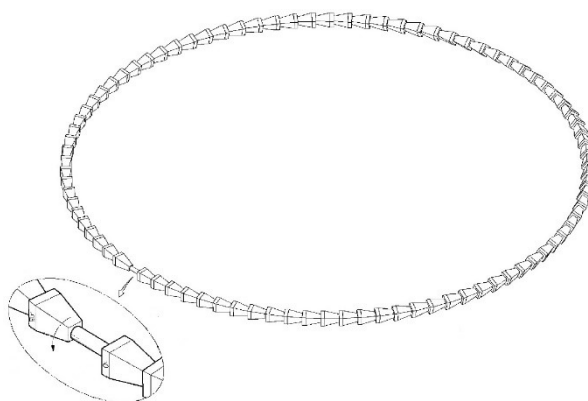


Рис. 17 – Дротяна пилка з різальними втулками (пат. KR20130055759A)

Ніж подрібнювача харчових і кормових продуктів виконано у вигляді стрічки Мебіуса (а. с. SU1747265A1; рис. 18).

Змішувач для оброблення гомо- та гетерогенних текучих середовищ містить вертикальний вал з двома рознесеними по висоті обоймами із закріпленими в них гнучкими робочими елементами у вигляді стрічок Мебіуса (заявка WO2018/085990A1). Також розроблено аналогічні змішувачі з одним (а. с. SU548434A1) і двома робочими елементами (а. с. SU903130A1; рис. 19) у вигляді стрічок Мебіуса.

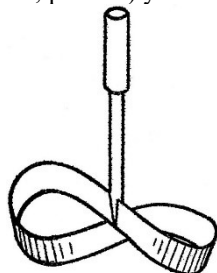


Рис. 18 – Ніж подрібнювача (а. с. SU1747265A1)

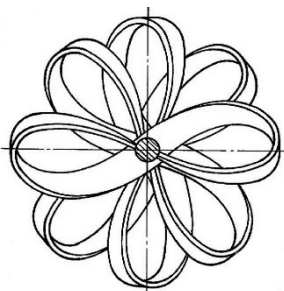
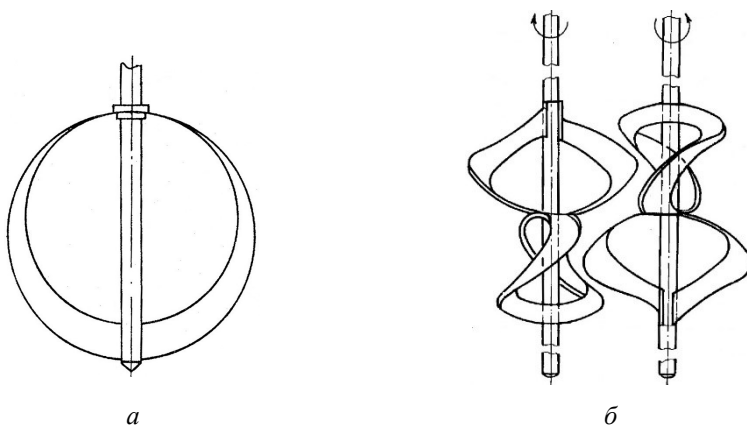


Рис. 19 – Мішалка для рідин (вид зверху; а. с. SU903130A1)

Також запропоновано змішувачі з горизонтальним (пат. US4615623A) і вертикальним валами й закріпленою на кожному з них мішалкою у вигляді круглої в плані стрічки Мебіуса (а. с. SU1797979A1; рис. 20,а), а також змішувачі для оброблення сипких і рідких середовищ з мішалками у вигляді стрічок Мебіуса, закріпленими на двох паралельних вертикальних валах на одному рівні (пат. RU2042414C1, RU2046649C1, RU2048877C1; рис. 20,б) або на одному вертикальному валу на різній висоті (пат. RU2046649C1, RU2056921C1, заявка WO2018/085986A1).



а – однороторна мішалка (а. с. SU1797979A1); б – двороторна мішалка (пат. RU2046649C1)

Рис. 20 – Роторні мішалки для рідин

Мішалка у вигляді сукупності стрічок Мебіуса, закріплених на декількох рівнях по висоті вертикального вала (пат. CN108348876A).

Мішалка, що закріплюється на вертикальному валу, виконана у вигляді стрічки Мебіуса з бортом, відігнутих під гострим або тупим кутом по відношенню до поверхні стрічки (пат. RU2301526C1). Така форма мішалки знижує ймовірність утворення застійних зон в апараті, інтенсифікує процес перемішування, а також підвищує жорсткість мішалки.

Мішалка, аналогічна за конструкцією клітьовій або ланцюговій [23, 24], але з вертикальними елементами у вигляді стрічок Мебіуса (заявка WO2018/085990A1; рис. 21).

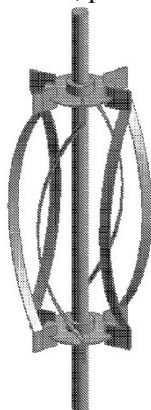


Рис. 21 – Роторна мішалка (заявка WO2018/085990A1)

Пристрій для насичення водойми киснем містить вертикальний вал з радіально розташованими в одній площині стрижнями, на кінцях яких закріплено мішалку у вигляді модифікованої стрічки Мебіуса, утвореної багаторазовим поворотом стрічки на 180°. Ця мішалка має форму тора, середня лінія якого лежить в одній площині (пат. CN109956565A). Завдяки багаторазовому скручуванню стрічки збільшується площа контакту між водою у водоймі й навколишнім повітрям, завдяки чому вміст кисню у воді збільшується.

Виготовлена з Х-подібної листової заготовки мішалка виконана у вигляді двох стрічок Мебіуса, з'єднаних між собою перемичкою (пат. RU2048876C1; рис. 22). Мішалка не тільки забезпечує ефективне перемішування рідких середовищ, а й характеризується високою динамічною стійкістю.

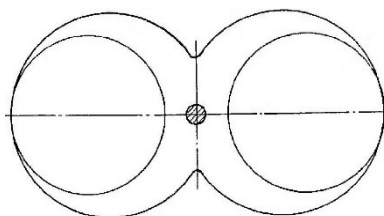


Рис. 22 – Мішалка для рідин (вид зверху; пат. RU2048876C1)

Пропелер, який містить лопаті у формі стрічок Мебіуса, може бути використаний як гребний і повітряний гвинт двигунів і рушіїв (пат. RU2330791C2; рис. 23).

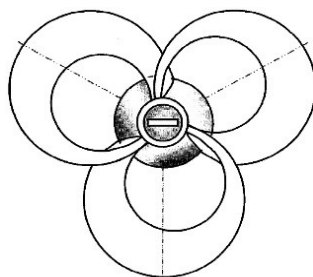


Рис. 23 – Гребний гвинт (пат. RU2330791C2)

Аналогічну форму має й вентилятор пристрою відведення теплоти від електронних приладів, зокрема мікропроцесорів (пат. RU2336669C1, RU2416180C2).

Вентилятор теплової машини містить рознесені по довжині вала дві лопаті у вигляді стрічок Мебіуса (а. с. SU1746067A1).

Розроблено конструкцію гвинта у формі подвійних лопатей Мебіуса для літака (заявка US2021/309347A1; рис. 24). Технічне рішення дає змогу легко контролювати швидкість польоту та напрямок польоту за допомогою незалежного керування лівими та правими, передніми, середніми й задніми гвинтами.

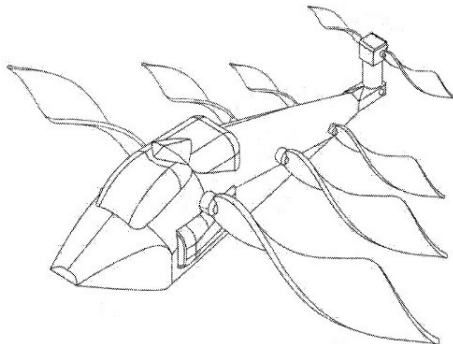


Рис. 24 – Літак з гвинтами у формі подвійних лопатей Мебіуса (заявка US2021/309347A1)

У масообмінних колонах широко використовуються елементи насадки, виконані у вигляді стрічки Мебіуса [23, 26]: з гладкою поверхнею (а. с. SU631185A1), численними отворами (а. с. SU776630A2) і прорізами (а. с. SU1327940A1) для проходження оброблюваних фаз, а також з виступами і западинами на його поверхні (пат. UA133095U). Аналогічний елемент з гладкою поверхнею, але виконаний із заготовки, попередньо складеної по ширині вдвічі з утворенням у поперечному перерізі V-подібного профілю (пат. RU190583U1), має підвищену жорсткість, проте він не виключає утворення застійних зон оброблюваної рідини в місці згину заготовки.

Елемент насадки у вигляді «подвійного» листа Мебіуса виконують з Н-подібної заготовки (пат. CN107008220A, CN207463238U), при цьому в листі можуть бути надрізані й відігнуті пелюстки для турбулізації потоків фаз.

Перфорована стрічка Мебіуса покрита дріткою сіткою, що збільшує питому поверхню і дисперсійну здатність елемента насадки (пат. CN207756157U). Також край елемента насадки може бути виконаний хвилястим (а. с. SU1699594A1).

Елемент насадки у вигляді стрічки Мебіуса в поперечному перерізі виконаний у вигляді зірки з трьома і більше променями, що рівномірно розходяться від її центра (а. с. SU1623735A1).

Елемент насадки у вигляді центрального плоского кільця з стрічками Мебіуса, що відходять від нього (а. с. SU1480863A1; рис. 25).

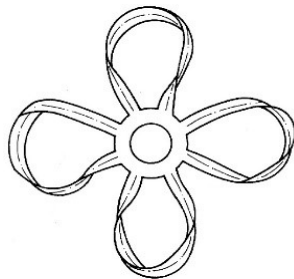


Рис. 25 – Мішалка для рідин (вид зверху; а. с. SU1480863A1)

Елемент насадки у вигляді двох однакових стрічок Мебіуса, що взаємопроникають (пат. CN107899533A; рис. 26). Більш технологічний елемент підвищеної жорсткості, що виключає необхідність виконання у стрічках глухих прямокутних прорізів (пат. UA131559U).

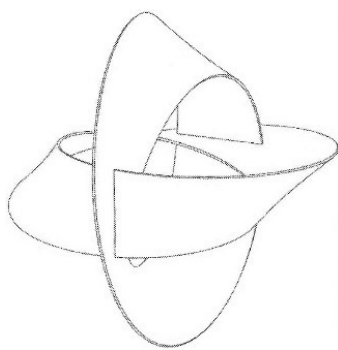


Рис. 26 – Елемент нерегулярної насадки (пат. CN107899533A)

Ректифікаційна установка для первинної переробки нафти містить резонатор з тонкостінними листами Мебіуса з парамагнітного або діамагнітного матеріалу (пат. RU2253498C1). Слабкі електромагнітні коливання, що діють на сировину, збільшують продуктивність колони і якість одержуваної продукції.

Установка для відгону ефірної олії містить транспортувальний орган у вигляді стрічки Мебіуса із закріпленими на ньому касетами для оброблюваної рослинної сировини (пат. RU2624957C1).

З метою зменшення габаритних розмірів рентгенівської трубки її стрічковий анод виконано у вигляді кільця Мебіуса (а. с. SU1278992A1). Завдяки такому технічному рішенню дія електронного пучка на певну ділянку анода відбувається через один його оборот, при цьому також інтенсифікується відведення теплоти від анода, що підвищує надійність і термін служби рентгенівської трубки.

Запропоновано хіральні елементи у вигляді пружин, неправильних тетраедрів, стрічок Мебіуса тощо для поглинання електромагнітного випромінювання в діапазоні від 10 МГц до 100 ГГц (заявка EP0520677A1).

Розроблено демонстраційний пристрій великого розміру, що містить основний каркас у формі стрічки Мебіуса з безліччю кольорових світлодіодних екранів (пат. CN106781888A, CN212847488U, CN217821884U, CN222260413U).

Пристрій для пароголового активування й карбонізації згорнутої вугільної стрічки Мебіуса дає змогу одержувати однорідний за структурою вуглецевмісний матеріал з потрібною мікропористою структурою (а. с. SU286981A).

Засіб для очищення водоохолоджувального радіатора транспортного від сміття виконано у вигляді перфорованої стрічки Мебіуса (пат. US4125147A).

У радіаційній стрічковій сушарці як транспортувальний орган використано стрічку Мебіуса з перегиним на її нижній (холостий) гілці (пат. RU2059955C1, RU2129400C1). Форма транспортувального органу лише знижує його абразивний знос, а й полегшує знімання з нього висушеного продукту.

Запропоновано вентиляційну та освітлювальну порожнисту цеглу, яка разом з сусідніми цеглинами в кладці створює світловентиляційні канали з поверхнею Мебіуса. Будова цегли поліпшує проникнення сонячного світла та природного вітру у приміщення будівлі (пат. CN202850318U).

Електрод для електрохімічного вилучення металів з водних розчинів їх солей у вигляді стрічки Мебіуса, виготовленої з використанням графітованого вуглецевого струмопровідного матеріалу (пат. RU2340708C1). Електрод аналогічного призначення й форми також розглянуто в пат. GB1144447A.

Розроблено сонячну панель у вигляді стрічки Мебіуса (пат. GB2441178A), а також робоче колесо вітрогенератора (а. с. SU868103A1, пат. FR2452008A1, CN109263004A, RU1792137C; рис. 27), при цьому вітроколесо для підвищення ефективності генерування електричної енергії може бути частково покрите фотоелектричним матеріалом (пат. GB2568972A).

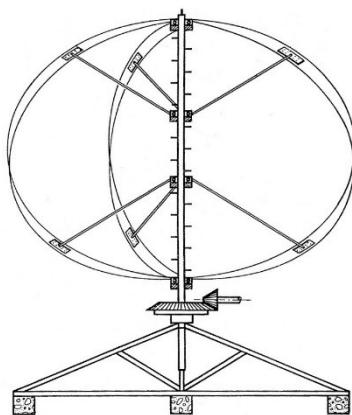


Рис. 27 – Робоче колесо вітрогенератора (пат. FR2452008A1)

Електричний конденсатор містить плоскі, замкнені, ізольовані один від одного електроди, розділені діелектриком, при цьому кожен з електродів виконано у вигляді стрічки Мебіуса (пат. RU2020622C1). Технічне рішення підвищує ємнісний опір за рахунок усунення паразитних індуктивностей електродів та діелектрика; усуває вплив електричних полів на торцях електродів через відсутність у стрічці Мебіуса початку й кінця, а також підвищує міцність і жорсткість конденсатора, оскільки утруднено зміщення електродів один відносно одного, що сприяє підвищенню стабільності його електричних параметрів.

Освітлювальна лампа у формі стрічки Мебіуса не дає тіні, рівномірно освітлюючи об'єкт спостереження (пат. CN221348903U).

Магнітний тороїд Мебіуса квадратного поперечного перерізу під час його обертання створює магнітне поле з обертовою полярністю навколо тороїда (заявка US2024/212903A1). Технічне рішення може бути використане в обертовому з'єднувальному пристрої, що містить два поруч розташовані пропонувані магнітні тороїди.

Система адитивного 3D-друку містить платформу у вигляді стрічки Мебіуса, що дає змогу послідовного друку на обох поверхнях певної ділянки платформи, зокрема друку на одній поверхні під час фіксації (тверднення) матеріалу, попередньо надрукованого на іншій поверхні цієї ділянки, що підвищує продуктивність принтера (заявка US2020/316854A1).

Гумометалевий шарнір (сайлентблок), який містить набір тросових кілець у вигляді стрічки Мебіуса, може бути використаний як пружний демпфірувальний пристрій важелів керування транспортним засобом, а також елементів його підвіски (пат. RU2378543C1). Під час дії вібраційного або ударного навантаження тросові кільця деформуються, ефективно розсіюючи енергію в навколишнє середовище, знижуючи навантаження на транспортний засіб, а також його агрегати та вузли.

У верстаті для анодно-механічного різання матеріалів електрод-інструмент виконано у вигляді стрічки Мебіуса (а. с. SU212403A1, SU464429A1).

Одним з відповідальних елементів нарізних з'єднань є стопорні шайби. Пружна шайба у вигляді стрічки Мебіуса (пат. RU2015425C1) характеризується високими стопорними властивостями, проте вона характеризується низькою технологічністю. В аналогічній шайбі по всій її поверхні виконано поздовжню канавку для утримання в ній мастильного матеріалу (пат. CN102003452A).

Виконавши рухому шкалу приладу у вигляді стрічки Мебіуса (при цьому стрілка-показчик залишається нерухомою), удвічі збільшується довжина шкали відліку (а. с. SU1041869A1). Для визначення невеликих відстаней між різними об'єктами використовують гнучку вимірювальну стрічку у вигляді стрічки Мебіуса (на кшталт кравецької стрічки з сантиметровою шкалою; пат. TW515638U).

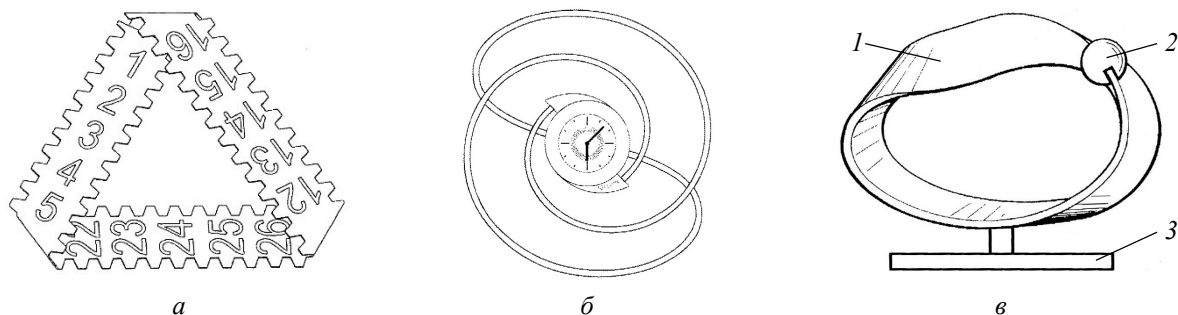
У гігрометрі вимірювальне дзеркало виконане у вигляді пластини з поверхнею Мебіуса, що істотно підвищує точність вимірювань точки роси аналізованих газів (пат. RU2213344C2).

Наручний годинник має пристрій відображення інформації, наприклад дати, у вигляді стрічки Мебіуса (пат. CN702783A1; рис. 28,а). При цьому виготовлена з термопластичного матеріалу стрічка охоплює три опорні ролики, змонтовані на пластині блоку індикації.

Виконаний у вигляді стрічки Мебіуса наручний годинника ремінець усуває потребу регулювання його розміру з метою підлаштування під руку людини, легко одягається на руку й знімається з неї, зменшуючи неприємне відчуття стискання зап'ястка, а завдяки потрібній жорсткості ремінця після знімання годинника з

руки його можна використовувати як настільний годинник (пат. JP2006334308A; рис. 28,б),

Новаторський годинник у вигляді жорсткої смуги у вигляді стрічки Мебіуса з нанесеними на ній позначками часу (шкалою) й рухомим по смугі покажчиком (курсором), оснащеним засобом для з'єднання зі смугою й засобом для рівномірного руху по ній (пат. ES2161642A1; рис. 28,в). Певне положення покажчика на смугі робить відповідне посилення на час.



a – пристрій відображення інформації наручного годинника (пат. СН702783А1);
б – наручний годинник з ремінцем у вигляді стрічки Мебіуса (пат. JP2006334308А);
в – настільний годинник (пат. ES2161642А1);
1 – смуга з нанесеною на нею шкалою; *2* – рухомий покажчик часу; *3* – підставка

Рис. 28 – Стрічка Мебіуса в годинникарстві

Виготовлені у вигляді стрічки Мебіуса (у тому числі й нанорозмірної стрічки) засоби для зберігання інформації, які характеризуються високою надійністю та мають надзвичайно низький рівень розсіювання енергії (заявка US2021/408369A1).

Також розроблено кристалізатор з нескінченною стрічкою Мебіуса ліофільної тканини для утворення зародків кристалів з розчину, їхнього росту та подальшого знімання зі стрічки (пат. UA150381U).

Застосування гідрофобної стрічки Мебіуса запропоновано в конструкції пристрою для очищення поверхні відкритої водойми від нафти та нафтопродуктів (пат. UA152065U, пат. RU2413054C1).

Запропоновано бетонну суміш, що містить цемент, крупний і дрібний заповнювачі, металеві волокна й воду, при цьому як металеві волокна вона містить об'ємні елементи у вигляді стрічки Мебіуса (пат. RU2188803C2).

Ще однією односторонньою поверхнею є пляшка Клейна – неорієнтована (одностороння) поверхня, вперше описана 1882 року німецьким математиком і педагогом Феліксом Християном Кляйном (також Клейн; нім. Felix Christian Klein; 1849–1925). Її назва, мабуть, походить від неправильного перекладу німецького слова Fläche (поверхня), яке німецькою мовою близьке за написанням до слова Flasche (пляшка). Цікаво, що в разі розсічення пляшки Клейна виходить стрічка Мебіуса. На відміну від звичайної пляшки, цей об'єкт не має «краю», де поверхня різко закінчувалася, тобто цей об'єкт не має «всередині» і «ззовні» [27] (рис. 29).

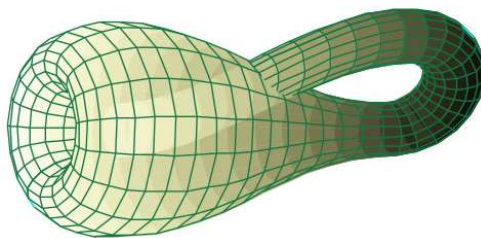


Рис. 29 – Пляшка Клейна

У формі пляшки Клейна запропоновано чашку для напоїв, конструкція якої завдяки порожнистій ручці забезпечує сполучення навколишнього середовища з боку дна чашки та вмістом чашки (пат. US6419111B1; рис. 30). Порожнисту ручку чашки герметично закрито, так що нею можна користуватися як звичайною чашкою, проте при цьому з точки зору математики вона має курйозні особливості.

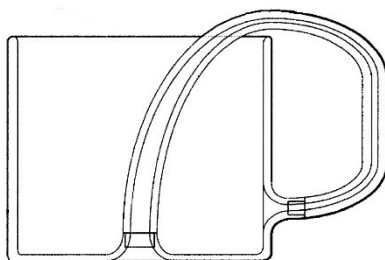


Рис. 30 – Чашка для напоїв у формі пляшки Клейна (пат. US6419111B1)

У формі стрічки Мебіуса або пляшки Клейна за допомогою 3D-друку виготовляють полімерні тривимірні насадкові елементи апаратів для культивування клітин і мікроорганізмів (заявка WO2007/136227A1). Також у формі пляшки Клейна існує й зимова спортивна шапочка [28].

Надзвичайно ефективними в системах радіозв'язку виявилися метаматеріальні стрічки Мебіуса (англ. *Metamaterial Möbius Strips; MMS*), забезпечуючи істотне зменшення розміру елементної бази радіоелектронної апаратури для заданої робочої частоти та придушення паразитних резонансних мод у широкому діапазоні температур (від мінус 40 до 85 °C), що покращує загальну продуктивність апаратури, включаючи зменшення споживання енергії. Зокрема MMS пропонуються для застосування в резонаторах для осциляторів і синтезаторів [29].

Також стрічка Мебіуса ефективно використовується в електротехніці, найчастіше в конструкціях низькоомних безіндукційних резисторів, зокрема у високочастотних та імпульсних пристроях, а також конденсаторних системах у високочастотних агрегатах і мікрохвильових резонаторах і фільтрах [30].

За більше ніж півтора століття термін використання унікальних властивостей стрічки Мебіуса також запропоновано магнітофонну стрічку телефонного автовідповідача (пат. US3953679A), звукову стрічку музичної шкатулки (пат. CN107180625A), стрічку для друкарської й копіювально-друкарської машинки (пат. US6779936B1, а. с. SU1110668A1), друкувальну стрічку з нанесеними на ній символами (пат. GB1481428A), картридж з чорнильною стрічкою (заявка US2017/119133A1), леза для гоління (пат. GB1216274A, ES353535A1), розпушувач ґрунту (а. с. SU436629A1, пат. RU2623481C1), пристрій для збирання насіння (пат. RU2479192C2), пристрій для евакуації людей з небезпечної зони (пат. CN109078273A), виставковий стенд (пат. CN201683509U), рухомий банер рекламного стенду (пат. CN202422632U), застібку-блискавку (пат. CN202897141U, заявка US2022/101753A1), гриль для смаження м'яса (пат. KR20110005711U), пов'язку для профілактики та лікування ступні атлета (пат. KR20120028607A), патронну стрічку підвищеної ємності (пат. RU2663774C1), нескінченну стрічку нівелірної рейки з нанесеною на ній шкалою (а. с. SU1041869A1), пломбу для консерваційного й гарантійного пломбування (пат. RU2086001C1), тросовий віброізолятор (пат. RU2199683C2), робочий орган системи вертикального транспортування рідин з підземних свердловин (заявка WO2017/186591A1), робочий орган підмітально-прибиральної машини (а. с. SU783402A1), робочий елемент електростатографічної системи очищення (пат. US3847480A), робочий орган робота для миття підлоги (пат. CN103190867A, CN203138364U), ланку круглоланкового ланцюга (пат. RU2679796C2), іграшкові залізницю [31, 32] та автомобільну дорогу (пат. KR102573060B1), турбоохолодильник (а. с. SU880088A1), пристрій для генерування надвисокочастотного (НВЧ) електромагнітного випромінювання (пат. RU2134600C1), кодово-імпульсний модулятор (пат. RU2616440C1) і резонатор НВЧ електромагнітних коливань (пат. RU2157026C1, RU2233514C1, RU2247763C1, RU2690693C1, RU2711047C1), приймач електромагнітного випромінювання (пат. RU2468473C1), п'єзоелектричний перетворювач (пат. RU2149483C1), монопольну антену (пат. EP3416241A1, заявки WO2017/138800A1, US2019/044224A1), ємнісний контур (пат. RU2353995C2), трубчасту панель сонячного колектора (пат. RU2601321C1), гнучкий вантажопідіймальний строп (заявка US2017/119133A1), кольоровий фільтр системи освітлення (пат. JP2007234402A), хірургічний ретрактор (заявка US2011130633A1), робочий орган очисного пристрою гумового валика прядильної машини (пат. CN210151272U), каркас стільця (пат. CN209807702U), атракціон «Американські гірки» (пат. CN103372320A), волоконний кільцевий лазер [33], браслет для вивчення англійських слів (пат. CN203982613U), головоломки (пат. US4384717A, US5324037A, USD545916S, JP2007098070A), жіночий шарф (пат. USD537609S), краватку (заявки US2019/183196A1, US2023/292862A1), плоску наплічну сумку [28], взуття [28], а також такі ювелірні вироби як каблучки, сережки й ланцюжки.

Існує хибна думка, що стрічка Мебіуса стала основою символу нескінченності ∞ , проте цей символ став використовуватися для позначення нескінченності ще за два сторіччя до відкриття стрічки Мебіуса.

Стилізований лист Мебіуса є символом серії науково-популярних книг фізико-математичної тематики «Бібліотечка "Квант"», а також основного елементу міжнародних кодів переробки (рис. 31) – спеціальних знаків, які застосовуються для позначення матеріалу, з якого виготовлений товар, а також спрощення процесу сортування перед його відправкою на перероблення для вторинного використання (погляньте на нижню або тильну частину майже будь-якого пластмасового виробу, і ви в цьому легко переконаєтесь).



Рис. 31 – Міжнародний символ переробки

Перед головним корпусом Центральноукраїнського національного технічного університету (місто Кропивницький, Україна) встановлено скульптуру «Студентству всіх часів». Дівчина і юнак, що символізують вічну молодість, з книжками в руках про щось захоплено розмовляють. При цьому дівчина сидить на лавці, виконаній у вигляді стрічки Мебіуса з нанесеними на ній у хронологічному порядку абrevіатурами цього навчального закладу (рис. 32).



**Рис. 32 – Скульптура «Студентству всіх часів»
(м. Кропивницький, Україна; фото Ігоря Мікульонка, 26.11.2018 р.)**

...Існує легенда, згідно з якою знамениту стрічку винайшов зовсім не Август Фердинанд Мебіус, а його дещо розсіяна покоївка, яка одного разу неправильно пришила комірець сорочки свого господаря. Можливо, це і правда. Але, тим не менш, дивовижна поверхня увійшла в історію саме під ім'ям Мебіуса.

Висновки. Незважаючи на більш ніж півтора столітній термін цілеспрямованого використання стрічки Мебіуса, інженери, науковці й винахідники продовжують пропонувати нові й нові напрямки її застосування. При цьому в розробленні інноваційних технічних рішень застосування стрічки Мебіуса істотну допомогу можуть надати математичне моделювання [34], нові технології [35, 36] і композиційні матеріали [26, 37–39] і штучний інтелект [40, 41]. При цьому з повною впевненістю можна стверджувати, що дивовижні властивості цього нескладного, але надзвичайно цікавого геометричного об'єкта далеко не вичерпані [42].

Перспективи подальших досліджень. Цей матеріал продовжує цикл статей стосовно практичного застосування різних ефектів у техніці й побуті [43–45]. Надалі передбачено проаналізувати практичне конструктивно-технологічне оформлення інших відомих ефектів та їхніх комбінацій у різних галузях економіки та побуту. Подібні огляди дають змогу фахівцям різного спрямування подивитися на класичні

знання шкільних курсів математики, фізики, хімії та інших предметів з точки зору їхньої професійної діяльності, що може стати їм у пригоді під час створення інноваційних зразків техніки й технології.

Список використаної літератури

1. Мікульонюк І.О. Інноваційні змішувачі хімічної технології. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 132 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/49568>
2. Мікульонюк І.О. Гідродинамічні засоби інтенсифікації теплообміну в круглих каналах постійного поперечного перерізу // Енерготехнології та ресурсозбереження. 2024. Т. 78. № 1. С. 124–140. DOI: <https://doi.org/10.33070/etars.1.2024.11>
3. Мікульонюк І.О. Інноваційне теплообмінне обладнання. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 142 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/60632>
4. Мікульонюк І.О., Карвацький А.Я., Іваненко О.І., Лелека С.В. Зовнішні знімні елементи труб для інтенсифікації теплообміну (Огляд конструкцій) // Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» : сер. «Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження». 2023. № 3(22). С. 23–40. DOI: 10.20535/2617-9741.3.2023.288246
5. Классификация конструкций насадок колонных аппаратов и методов интенсификации в них процессов теплообмена / А.С. Пушнов, И.О. Микулёнок, А.С. Севрюков, М.Г. Беренгартен // Химическая технология. 2014. № 4. С. 244–250.
6. Mikulionok I. O. Ring packing contact elements of mass transfer devices (review of patents) // Chemical and Petroleum Engineering. 2018. Vol. 54, N 1–2. P. 125–129. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10556-018-0450-y>
7. Mikulionok I. O. Classification of the Packing Contact Elements of Mass-Exchange Towers with Second-Order form of the Surfaces (Survey of Patents) // Chemical and Petroleum Engineering. 2022. Vol. 57, N 11–12. P. 976–981. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10556-022-01034-y>
8. Мікульонюк І.О. Контактні та допоміжні пристрої тепломасообмінних колон. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 194 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/50142>
9. Мікульонюк І.О., Лукінюк М.В. Розміщення орієнтованої кільцевої насадки в колонних тепломасообмінних апаратах (Огляд) // Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» : сер. «Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження». 2025. № 1(24). С. 26–36. DOI: 10.20535/2617-9741.1.2025.325834
10. Mikulionok I. O. Screw extruder mixing and dispersing units // Chemical and Petroleum Engineering. 2013. Vol. 49, N 1–2. P. 103–109. DOI: 10.1007/s10556-013-9711-y
11. Mikulionok I. O. Classification of the Structures of Closed-Type Rotary Mixers for Plastics and Rubber Mixtures (Survey of Patents) // Chemical and Petroleum Engineering. 2021. Vol. 57, N 5–6. P. 437–444. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10556-021-00956-3>
12. Mikulionok I. O. Classification of the Tumbling Bodies of Rattlers (Tumbling Barrels) (Survey of Patents) // Chemical and Petroleum Engineering. 2022. Vol. 57, N 9–10. P. 885–892. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10556-022-01021-3>
13. Мікульонюк І.О., Карвацький А.Я., Лелека С.В., Іваненко О.І. Валкові дробарки і млини (Огляд конструкцій) // Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» : сер. «Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження». 2022. № 1(21). С. 30–43. DOI: 10.20535/2617-9741.1.2022.254157
14. Мікульонюк І.О., Карвацький А.Я., Лелека С.В., Іваненко О.І. Подрібнювальні тіла барабанних млинів і дробарок (Огляд конструкцій) // Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» : сер. «Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження». 2022. № 2(21). С. 9–21. DOI: 10.20535/2617-9741.2.2022.260339
15. Mikulionok I. Classification and analysis of designs of screw presses for oil raw materials // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Технічні науки. 2024. Вип. Т. 24, № 1. С. 23–52. DOI: 10.32782/2078-0877-2024-24-1-2
16. Möbius strip. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Möbius_strip (дата звернення: 26.03.2025).
17. Starostin E. L., van der Heijden G. H. M. The shape of a Möbius strip // Nature Materials. 2007. Vol. 6, N 8. P. 563–567. DOI: 10.1038/nmat1929
18. August Ferdinand Möbius. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/August_Ferdinand_Möbius (дата звернення: 26.03.2025).
19. Johann Benedict Listing. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Benedict_Listing (дата звернення: 26.03.2025).
20. Cartwright J. H. E., González D. L. Möbius Strips Before Möbius: Topological Hints in Ancient Representations // The Mathematical Intelligencer. 2016. Vol. 38, N 2. P. 69–76. DOI: 10.1007/s00283-016-9631-8

21. Flapan E. When Topology Meets Chemistry: A Topological Look at Molecular Chirality (Outlooks). Washington, DC : The Mathematical Association of America, 2000. 256 p. DOI: 10.1017/CBO9780511626272
22. Mikulionok I. O. Use of Möbius Strip in Chemical Machine Design (Survey of Patents) // Chemical and Petroleum Engineering. 2021. Vol. 56, N 11–12. P. 1037–1042. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10556-021-00880-6>
23. Мікульонюк І. О. Механічні, гідромеханічні і масообмінні процеси та обладнання хімічної технології. Київ : НТУУ «КПІ», 2014. 340 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/38169>
24. Мікульонюк І. О. Механічні та гідромеханічні процеси, апарати і машини хімічної технології. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 172 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/66408>
25. Мікульонюк І. О. Технологічні основи перероблення полімерних матеріалів. 3-тє вид., переробл. та доповн. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 296 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/68766>
26. Mikulionok I. O. Classification of stamped packing elements of mass-exchange apparatuses (survey of patents) // Chemical and Petroleum Engineering. 2021. Vol. 56, N 9–10. P. 861–869. DOI: 10.1007/s10556-021-00853-9
27. Polthier K. Imaging maths – Inside the Klein bottle // Maths Plus Magazine. 2003. September. 11 p. URL: <https://plus.maths.org/content/imaging-maths-inside-klein-bottle> (дата звернення: 27.03.2025).
28. Kim H. Fashion Design Application of the Mobius Strip as a Formative Principle // Archives of Design Research. 2019. Vol. 32, N 4. P. 147–161. URL: <http://dx.doi.org/10.15187/adr.2019.11.32.4.147>
29. Poddar A. K., Rohde U. L. Metamaterial Möbius Strips (MMS): Application in Resonators for Oscillators and Synthesizers / IEEE International Frequency Control Symposium (FCS). Taipei, Taiwan, 2014. 9 p. DOI: 10.1109/fcs.2014.6859924
30. Vujević D. Application of the Möbius strip in electrical engineering // Energija. 2007. Vol. 56, N 6. P. 700–711. URL: <https://hrcak.srce.hr/clanak/31709>
31. Have you ever seen a train running on a mobius strip? URL: https://www.reddit.com/r/modeltrains/comments/rlnwn/have_you_ever_seen_a_train_running_on_a_mobius/ (дата звернення: 04.04.2025).
32. A Railroad Empire You Can Build with Mobius! URL: <https://www.tc trains.org/etrain/a-railroad-empire-you-can-build-with-mobius/> (дата звернення: 04.04.2025).
33. Li S., Zeng X., Zhou J., Cheng Z., Feng Y. Polarization and longitudinal modes of Möbius fiber ring lasers // Optica. 2022. Vol. 9, N 12. Article 1394. 7 p. DOI: <https://doi.org/10.1364/OPTICA.474407>
34. Meerschaert M. M. Mathematical Modeling. 4th ed. Amsterdam : Elsevier Inc., 2013. 384 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2010-0-66940-9>
35. Ramya A., Vanapalli S. I. 3D Printing Technologies in Various Applications // International Journal of Mechanical Engineering and Technology (IJMET). 2016. Vol. 7, N 3. P. 396–409. URL: https://iaeme.com/MasterAdmin/Journal_uploads/IJMET/VOLUME_7_ISSUE_3/IJMET_07_03_036.pdf
36. Shahrubudin N., Lee T. C., Ramlan R. An Overview on 3D Printing Technology: Technological, Materials, and Applications // *Procedia Manufacturing*. 2019. Vol. 35. P. 1286–1296. DOI: 10.1016/j.promfg.2019.06.089
37. Chung D. D. L. Composite Materials: Science and Applications. London : Springer Verlag London Limited, 2010. 349 p. URL: https://www.academia.edu/36174278/Composite_Materials_Science_and_Applications
38. Мікульонюк І. О., Радченко Л. Б. Полімерні композитні матеріали й вироби з них. Одержання, перероблення та властивості. Київ : ІВЦ «Видавництво «Політехніка»», 2005. 179 с.
39. Мікульонюк І. О., Сокольський О. Л. Полімерні матеріали і вироби з них (одержання, перероблення, властивості). Київ : НТУУ «КПІ», 2015. 208 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/37632>
40. Dargham J. A., Mounq E. G., Chin R. K. Y., Mamat M., Wong T. H. Artificial Intelligence (AI) and the Future of Mankind. In: Yew H. T., Mamat M., Dargham J. A., Seng Kheau C., Mounq E. G. (Eds.) Internet of Things and Artificial Intelligence for Smart Environments. Singapore : Springer, 2024. P. 67–82. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-97-1432-2_5
41. Ertel W. Introduction to Artificial Intelligence. 3rd ed. https://books.google.com.ua/books?id=O7kfEQAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=ru&source=gbs_ge_summary_r&cad=0 Wiesbaden : Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH. 2024. 383 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-658-43102-0>
42. Möbius K., Plato M., Savitsky A. The Möbius Strip Topology: History, Science, and Applications in Nanotechnology, Materials, and the Arts. New York : Jenny Stanford Publishing, 2022. 926 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003256298>

43. Mikulionok I. O. Stabilization of the temperature of the working medium in the equipment of chemical plants (a survey of patents) // *Chemical and Petroleum Engineering*. 2015. Vol. 51, N 5–6. P. 324–327. DOI: 10.1007/s10556-015-0046-8
 44. Мікульонюк І. О., Іваненко О. І. Застосування феромагнітних матеріалів для стабілізації теплового режиму технологічних процесів (Огляд) // *Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»* : сер. «Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження». 2024. № 3(23). С. 19–38. DOI: 10.20535/2617-9741.3.2024.312417
 45. Мікульонюк І. О., Іваненко О. І. Практичне використання ефектів Зеебека та Пельтьє (Огляд) // *Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»* : сер. «Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження». 2024. № 4(23). С. 9–34. DOI: 10.20535/2617-9741.4.2024.319010
-

Ihor Mikulionok, Mykhailo Lukiniuk

APPLICATIONS OF THE MÖBIUS STRIP (Review)

The subject of research is industrial and household equipment and devices, which as a whole or their structural elements are made in the form of a Möbius strip.

The purpose of the research is a critical analysis of the use of the Möbius strip in engineering, technology and everyday life.

One of the most important characteristics of elements of various machines, apparatuses, devices, and structures is their geometric shape, which is especially evident in mechanical engineering, aerodynamics and hydrodynamics, and heat and mass transfer. One of the geometric objects with atypical and unique properties is the Möbius strip (sheet, ring, Möbius loop) – a topological object that is the simplest unoriented surface with one side and one edge. The main advantage of the Möbius strip is precisely the presence of one surface, which is widely used in a wide variety of areas of human life, and primarily in engineering and technology. The Möbius strip has found its application in mechanical and instrument engineering, chemical technology and related industries, thermal power engineering, renewable energy, construction, light industry, agriculture, transport, aerospace and military technology, electronics, radio engineering, computer technology, medicine, advertising and jewelry, entertainment and recreation, personal hygiene products, as well as in everyday life. In developing innovative technical solutions, the use of the Möbius strip in various sectors of the economy and everyday life can provide significant assistance not only from the more than one and a half century of experience of scientists, engineers, and inventors in this matter, but also from the unique capabilities of artificial intelligence.

This review may be useful to creators of new equipment and technology, because when creating new developments, a fund of technical, including geometric, effects is widely used, which is an integral part of the information fund of inventors, designers, and scientists and helps them create innovative solutions to technical problems.

Keywords: *topology, geometric shapes, unoriented surface, one-sided surface, Möbius strip, engineering, applications*

References

1. Mikulionok, I. O. (2022). Innovatsiini zmishuvachi khimichnoi tekhnologii [Innovative mixers of chemical technology]. Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/49568> (Ukr.)
2. Mikulionok, I. O. (2024). Hidrodinamichni zasoby intensifikatsii teploobminu v kruhlykh kanalakh postinoho poperexnoho pererizu [Hydrodynamic Means of Heat Exchange Intensification in Constant Cross-Section Round Channels]. *Energotekhnologii ta resursozberezhennia*, vol. 78, no. 1, pp. 124–140. DOI: <https://doi.org/10.33070/etars.1.2024.11> (Ukr.)
3. Mikulionok, I. O. (2023). Innovatsiine teploobminne obladnannia [Innovative heat exchange equipment]. Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/60632> (Ukr.)
4. Mikulionok, I. O., Karvatskii, A. Ya., Ivanenko, O. I., Leleka, S. V. (2023). Zovnishni znimni elementy trub dlia intensyfikatsii teploobminu (Ohliad konstrukttsii) [External removable elements of pipes for heat transfer enhancement (Design overview)]. *Visnyk Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. Himichna inzheneriia, ekologiia ta resursozberezhennia*, no. 3(22), pp. 23–40. DOI: 10.20535/2617-9741.3.2023.288246 (Ukr.)
5. Pushnov, A. S., Mikulionok I. O., Sevryukov, A. S., Berengarten, M. G. (2014). Klassifikatsiya konstruktsiy nasadok kolonnykh apparatov i metodov intensifikatsii v nikh protsessov teplomassoobmena [Classification of

- column packings designs and methods of intensifying heat and mass transfer processes in them]. *Khimicheskaya tekhnologiya*, no. 4, pp. 244–250 (Rus.)
6. Mikulionok, I. O. (2018). Ring packing contact elements of mass transfer devices (review of patents). *Chemical and Petroleum Engineering*, vol. 54, no. 1–2, pp. 125–129. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10556-018-0450-y>
 7. Mikulionok, I. O. (2022). Classification of the Packing Contact Elements of Mass-Exchange Towers with Second-Order form of the Surfaces (Survey of Patents). *Chemical and Petroleum Engineering*, vol. 57, no. 11–12, pp. 976–981. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10556-022-01034-y>
 8. Mikulionok, I. O. (2022). Kontaktnei ta dopomizhni prystroi teplomasoobminnykh kolon [Contact and auxiliary devices of heat and mass exchange columns]. Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/50142> (Ukr.)
 9. Mikulionok, I. O., Lukiniuk, M. V. (2025). Rozmishchennia oriientovanoi kiltsevoi nasadky v kolonykh teplomasoobminnykh aparatakh (Ohliad) [Location of oriented ring packing elements in column heat and mass exchange apparatus (Review)]. *Visnyk Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. Himichna inzheneriia, ekologiia ta resursozbezhezhennia*, no. 1(24), pp. 26–36. DOI: 10.20535/2617-9741.1.2025.325834 (Ukr.)
 10. Mikulionok, I. O. (2013). Screw extruder mixing and dispersing units. *Chemical and Petroleum Engineering*, vol. 49, no. 1–2, pp. 103–109. DOI: 10.1007/s10556-013-9711-y
 11. Mikulionok, I. O. (2021). Classification of the Structures of Closed-Type Rotary Mixers for Plastics and Rubber Mixtures (Survey of Patents). *Chemical and Petroleum Engineering*, vol. 57, no. 5–6, pp. 437–444. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10556-021-00956-3>
 12. Mikulionok, I. O. (2022). Classification of the Tumbling Bodies of Rattlers (Tumbling Barrels) (Survey of Patents). *Chemical and Petroleum Engineering*, vol. 57, no. 9–10, pp. 885–892. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10556-022-01021-3>
 13. Mikulionok, I. O., Karvatskii, A. Ya., Leleka, S. V., Ivanenko, O. I. (2022). Valkovi drobarky i mlynny (Ohliad konstruktii) [Roll crushers and mills (Design review)]. *Visnyk Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. Himichna inzheneriia, ekologiia ta resursozbezhezhennia*, no. 1(21), pp. 30–43. DOI: 10.20535/2617-9741.1.2022.254157 (Ukr.)
 14. Mikulionok, I. O., Karvatskii, A. Ya., Leleka, S. V., Ivanenko, O. I. (2022). Podribniuvalni tila barabannykh mlyniv i drobarok (Ohliad konstruktii) [Grinding bodies of drum mills and crushers (Design review)]. *Visnyk Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. Himichna inzheneriia, ekologiia ta resursozbezhezhennia*, no. 2(21), pp. 9–21. DOI: 10.20535/2617-9741.2.2022.260339 (Ukr.)
 15. Mikulionok, I. (2024). Classification and analysis of designs of screw presses for oil raw materials. *Pratsi Tavriiskoho derzhavnoho agrotekhnolohichnoho universytetu. Tekhnichni nauky*, vol. 24, no. 1, pp. 23–52. DOI: 10.32782/2078-0877-2024-24-1-2
 16. Möbius strip. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Möbius_strip (Accessed March 26, 2025).
 17. Starostin, E. L., van der Heijden, G. H. M. (2007). The shape of a Möbius strip. *Nature Materials*, vol. 6, no. 8, pp. 563–567. DOI: 10.1038/nmat1929
 18. August Ferdinand Möbius. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/August_Ferdinand_Möbius (Accessed March 26, 2025).
 19. Johann Benedict Listing. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Benedict_Listing (Accessed March 26, 2025).
 20. Cartwright, J. H. E., González, D. L. (2016). Möbius Strips Before Möbius: Topological Hints in Ancient Representations. *The Mathematical Intelligencer*, vol. 38, no. 2, pp. 69–76. DOI: 10.1007/s00283-016-9631-8
 21. Flapan E. (2000). When Topology Meets Chemistry: A Topological Look at Molecular Chirality (Outlooks). Washington, DC : The Mathematical Association of America, 256 p. DOI: 10.1017/CBO9780511626272
 22. Mikulionok, I. O. (2021). Use of Möbius Strip in Chemical Machine Design (Survey of Patents). *Chemical and Petroleum Engineering*, vol. 56, no. 11–12, pp. 1037–1042. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10556-021-00880-6>
 23. Mikulionok, I. O. (2014). Mekhanichni, hidromekhanichni i masoobminni protsessy ta obladnannia khimichnoi tekhnologii [Mechanical, Hydromechanical, and Mass-Exchange Processes and Equipment in Chemical Engineering]. Kyiv : NTUU "KPI". URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/38169> (Ukr.)
 24. Mikulionok, I. O. (2018). Mekhanichni ta hidromekhanichni protsessy, aparaty i mashyny khimichnoi tekhnologii [Mechanical and hydromechanical processes, apparatus and machines of chemical technology]. Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/66408> (Ukr.)
 25. Mikulionok, I. O. (2024). Tekhnologichni osnovy pereroblennia polimernykh materialiv [Technological bases of polymer materials processing]. 3rd ed. Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/35084> (Ukr.)
 26. Mikulionok, I. O. (2021). Classification of stamped packing elements of mass-exchange apparatuses (survey of patents). *Chemical and Petroleum Engineering*, vol. 56, no. 9–10, pp. 861–869. DOI: 10.1007/s10556-021-00853-9

27. Polthier K. Imaging maths – Inside the Klein bottle // *Maths Plus Magazine*. 2003. September. 11 p. URL: <https://plus.maths.org/content/imaging-maths-inside-klein-bottle> (Accessed March 27, 2025).
28. Kim, H. (2019). Fashion Design Application of the Möbius Strip as a Formative Principle. *Archives of Design Research*, vol. 32, no. 4, pp. 147–161. URL: <http://dx.doi.org/10.15187/adr.2019.11.32.4.147>
29. Poddar, A. K., Rohde, U. L. (2014). Metamaterial Möbius Strips (MMS): Application in Resonators for Oscillators and Synthesizers. *IEEE International Frequency Control Symposium (FCS)*. Taipei, Taiwan, 2014. 9 p. DOI: 10.1109/fcs.2014.6859924
30. Vujević, D. (2007). Application of the Möbius strip in electrical engineering. *Energija*, vol. 56, no. 6, pp. 700–711. URL: <https://hrcak.srce.hr/clanak/31709>
31. Have you ever seen a train running on a mobius strip? URL: https://www.reddit.com/r/modeltrains/comments/rlnwn/have_you_ever_seen_a_train_running_on_a_mobius/ (Accessed March 29, 2025).
32. A Railroad Empire You Can Build with Mobius! URL: <https://www.tcatrains.org/etrain/a-railroad-empire-you-can-build-with-mobius/> (Accessed March 29, 2025).
33. Li, S., Zeng, X., Zhou, J., Cheng, Z., Feng, Y. (2022). Polarization and longitudinal modes of Möbius fiber ring lasers. *Optica*, vol. 9, no. 12, article 1394, 7 p. DOI: <https://doi.org/10.1364/OPTICA.474407>
34. Meerschaert, M. M. (2013). Mathematical Modeling. 4th ed. Elsevier Inc., Amsterdam. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2010-0-66940-9>
35. Ramya, A., Vanapalli, S. I. (2016). 3D Printing Technologies in Various Applications. *International Journal of Mechanical Engineering and Technology (IJMET)*, vol. 7, no. 3, pp. 396–409. URL: https://iaeme.com/MasterAdmin/Journal_uploads/IJMET/VOLUME_7_ISSUE_3/IJMET_07_03_036.pdf
36. Shahrubudin, N., Lee, T. C., Ramlan, R. (2019). An Overview on 3D Printing Technology: Technological, Materials, and Applications. *Procedia Manufacturing*, vol. 35, pp. 1286–1296. DOI: 10.1016/j.promfg.2019.06.089
37. Chung, D. D. L. (2010). Composite Materials: Science and Applications. Springer Verlag London Limited, London. URL: https://www.academia.edu/36174278/Composite_Materials_Science_and_Applications
38. Mikulionok, I. O., Radchenko, L.B. (2005). Polimerni kompozytni materialy i vyroby z nykh. oderzhannia, pereroblennia ta vlastyvosti [Polymer composite materials and products from them. Production, processing and properties]. IVTs "Vydavnytstvo "Politekhnik"», Kyiv (Ukr.)
39. Mikulionok, I. O., Sokolskyi, O. L. (2015). Polimerni materialy i vyroby z nykh (oderzhannia, pereroblennia, vlastyvosti) [Polymer materials and products from them (production, processing, properties)]. NTUU "KPI", Kyiv. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/37632> (Ukr.)
40. Dargham, J. A., Mounq, E. G., Chin, R. K. Y., Mamat, M., Wong, T. H. (2024). Artificial Intelligence (AI) and the Future of Mankind. In: Yew, H. T., Mamat, M., Dargham, J. A., Seng Kheau, C., Mounq, E. G. (Eds.) *Internet of Things and Artificial Intelligence for Smart Environments*. Springer, Singapore. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-97-1432-2_5
41. Ertel W. (2024). Introduction to Artificial Intelligence. 3rd ed. https://books.google.com.ua/books?id=O7kfEQAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=ru&source=gbs_ge_summary_r&cad=0 Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Wiesbaden. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-658-43102-0>
42. Möbius K., Plato M., Savitsky A. (2022). The Möbius Strip Topology: History, Science, and Applications in Nanotechnology, Materials, and the Arts. New York, Jenny Stanford Publishing. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003256298>
43. Mikulionok I. O. (2015). Stabilization of the temperature of the working medium in the equipment of chemical plants (a survey of patents). *Chemical and Petroleum Engineering*, vol. 51, no. 5–6, pp. 324–327. DOI: 10.1007/s10556-015-0046-8
44. Mikulionok, I. O., Ivanenko, O. I. (2024). Zastosuvannia feromagninykh materialiv dlia stabilizatsii teplovogo rezhymu tekhnologichnykh protsesiv (Ogliad) [Application of ferromagnetic materials for technological processes thermal regime stabilization (review)]. *Visnyk Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. Himichna inzheneriia, ekologiia ta resursozberezhennia*, no. 3(23), pp. 19–38. DOI: 10.20535/2617-9741.3.2024.312417 (Ukr.)
45. Mikulionok, I. O., Ivanenko, O. I. (2024). Praktychne vykorystannia efektyv Zeiebeki ta Peltie (Ogliad) [Practical use of Seebeck and Peltier effects (Review)]. *Visnyk Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. Himichna inzheneriia, ekologiia ta resursozberezhennia*, no. 4(23), pp. 9–34. DOI: 10.20535/2617-9741.4.2024.319010 (Ukr.)