

## ХІМІЧНА ІНЖЕНЕРІЯ

УДК 62-96/536.2

ПАНОВ С. М., ДІДЕНКО Л. В.  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

### ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ДЖЕРЕЛ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

У статті наведено приклади використання методу джерел для аналітичного дослідження задач теплопровідності, який отримав широкого застосування для проектування процесів зміцнення та зварювання матеріалів під дією інфрачервоного випромінювання, а також для дослідження термопружної взаємодії і теплофізичних властивостей матеріалів. Проаналізовано фундаментальний розв'язок Кельвіна для тривимірного нестационарного рівняння теплопровідності у разі дії точкового миттєвого джерела теплоти та різновиди фундаментального розв'язку для одновимірних і двовимірних задач теплопровідності, які є прикладами функції Гріна. Отримано та проаналізовано аналітичні розв'язки нестационарного рівняння теплопровідності за граничних умов I і II родів напівобмеженого стрижня для режимів охолодження/нагрівання, що є зручними для практичного застосування в інженерних розрахунках. Показано, що функціональні залежності для визначення температури та густини теплового потоку під час нагрівання за граничних умов I і II родів можна отримати з розв'язку рівняння теплопровідності для режиму охолодження за умов I роду за допомогою простої заміни змінної. З використанням отриманих розв'язків можна відслідковувати координату і час настання максимальної швидкості нагрівання в напівобмеженому стрижні, або максимальну швидкість охолодження під час охолодження. Отримані розв'язки нестационарного рівняння теплопровідності напівобмеженого стрижня можуть бути застосовані для оперативного визначення раціональних термічних параметрів під час лазерного зміцнення та дослідження температурних залежностей теплофізичних властивостей матеріалів.

**Ключові слова:** рівняння теплопровідності, граничні умови, фундаментальний розв'язок, напівобмежений стрижень, температуропровідність, швидкість нагрівання

DOI: 10.20535/2617-9741.1.2025.325830

\* Corresponding author: larradi@gmail.com

Received 12 December 2024; Accepted 22 January 2025

**Постановка проблеми.** Метод джерел є потужним інструментом для аналітичного дослідження задач теплопровідності в умовах інтенсивного нагріву, який отримав широкого застосування для проектування процесів зміцнення та зварювання матеріалів за допомогою інфрачервоного лазерного випромінювання, а також для дослідження термопружної взаємодії і теплофізичних властивостей матеріалів тощо. Тому використання вказаного методу для оптимізації теплових процесів у практичних інженерних застосунках, зокрема, для контролю температурних режимів під час дії лазерних джерел теплового випромінювання є актуальним завданням.

**Аналіз попередніх досліджень.** У праці [1] розглянуто фундаментальні теорії та розв'язки методу теплового імпульсу, включаючи відмінності та схожість теорій і застосувань між миттєвим лінійним джерелом теплоти і короткочасним лінійним джерелом теплоти, між методами теплового імпульсу з подвійним зондом і методом теплового імпульсу з одним зондом, а також між методом підгонки нелінійної моделі і одноточковим методом для інтерпретації даних. Крім того, також представлені числові та напіваналітичні розв'язки, щоб надати можливість для вибору найкращого методу для практичного застосування.

У статті [2] висвітлено дослідження термопружної взаємодії в однорідному, ортотропному, обертовому середовищі за рахунок впливу миттєвого джерела теплоти. У цьому дослідженні використовується модель трифазного відставання. Диференційне рівняння у векторно-матричній формі було сформульовано за

допомогою комбінованого перетворення Лапласа–Фур’є, а розв’язок отримано за допомогою підходу власних значень. Квадратурна формула Гауса та метод Белмана використовуються для числової оцінки компонентів переміщення, температури та теплового напруження. Нарешті, числові результати зображені графічно та порівнюються з результатами моделей Лорда–Шульмана та Гріна–Нагді типу Ш.

Праця [3] присвячена теоретичному дослідженню моделі миттєвого лінійного джерела теплоти, розташованого паралельно границі розділу між двома напівобмеженими теплопровідними середовищами в ідеальному тепловому контакті. Відомо, що функції Гріна для цієї задачі були отримані нещодавно за допомогою методу Каньяра–де Хоопа, але в поточній праці застосовується інший метод отримання функцій Гріна, заснований на роботі R. Bellman, R. E. Marshak і G. M. Wing і розроблений для миттєвого точкового джерела. Функції Гріна, отримані цим методом, мають велику перевагу в числових обчисленнях порівняно з функціями Green, отриманими методом Каньяра–де Хоопа. Наведено результати розрахунків температурних полів і теплових потоків у просторі та їх інтерпретація з використанням хвильових діаграм.

У статті [4] розглядаються достатні умови, за яких миттєве джерело теплоти можна вважати джерелом теплоти зварювання, а не рухомим джерелом. Порівнюються підвищення температури, розраховані миттєвим джерелом і рухомим. Знайдено застосовні умови миттєвого джерела теплоти з похибками 1 % та 5 %. Це дозволяє вибрати або рухоме, або миттєве джерело з інформацією про швидкість зварювання, коефіцієнт теплопровідності та відстань від центральної лінії зварного шва до потрібного місця. Запропоновано наближені рівняння для визначення максимального підвищення температури за допомогою рухомого джерела та доведено, що точність їх розрахунку становить ~99 %.

У праці [5] показано, що розрахунки для оцінки розподілу температури при багатопрхідному зварюванні є більш складними, ніж при однопрхідному зварюванні, через накладання теплових ефектів одного проходу на попередні проходи. Встановлено, що використання розподіленого джерела теплоти запобігає нескінченним значенням температур поблизу зони плавлення. Порівняння показало, що теплові цикли, отримані з моделі розподіленого (гауссового) джерела теплоти, є більш надійними, ніж ті, що отримані з моделі концентрованого джерела теплоти.

У праці [6] з використанням методу лінійного миттєвого джерела теплоти, розглянуто неруйнівні методи визначення теплофізичних характеристик матеріалів. Наведено процедуру оцінки похибок у запропонованих методиках.

У праці [7] фундаментальний розв’язок Кельвіна використовується для розв’язання нестационарних задач теплопровідності числовим методом граничних елементів.

З проведеного літературного огляду витікає, що невирішеною частиною наукової проблеми застосування методу миттєвого джерела теплоти для отримання аналітичних розв’язків задач нестационарної теплопровідності є недостатні дослідження окремих розв’язків для практичного застосування, наприклад, для режимів охолодження/нагрівання напівобмеженого стрижня за граничних умов I і II родів.

**Метою** статті є отримання та аналіз аналітичних розв’язків нестационарного рівняння теплопровідності за граничних умов I і II родів напівобмеженого стрижня з використанням методу миттєвих джерел і фундаментального розв’язку Кельвіна.

**Методика роботи.** Методологія досліджень базується на теорії потенціалу, на методі миттєвих джерел та функціях помилок Гауса. Розглянемо фундаментальний розв’язок тривимірного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = a \nabla^2 t(x, y, z, \tau), \quad (1)$$

де  $t$  – температура, К;  $\tau$  – час, с;  $\nabla$  – оператор Гамільтона, 1/м;  $a = \lambda/c_p \rho$  – температуропровідність, м<sup>2</sup>/с;  $\lambda$  – теплопровідність, Вт/(м·К);  $c_p$  – масова ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К);  $\rho$  – щільність, кг/м<sup>3</sup>.

Рівняння (1) має розв’язок, отриманий Кельвіном, за таких крайових умов:

1. Тіло необмежених розмірів. Властивості тіла однорідні і залежать від температури.
2. На поверхні  $x = \infty, y = \infty, z = \infty$  підтримуються граничні умови I роду, для спрощення приймається нульове значення температури  $t = 0$  на нескінченності. (За температури навколишнього середовища  $t = t_*$  можна перейти до умови  $t' = t - t_* = 0$ ).
3. У момент часу  $\tau = 0$ , прийнятий за початок відліку, в точці з координатами  $(x_1, y_1, z_1)$  спалахнує й одразу згасає миттєве точкове джерело, що вносить у тіло  $Q_t$  (Дж) теплоти.

Температура в будь-якій точці простору описується фундаментальним розв'язком Кельвіна (ядром теплопровідності) [7–9]

$$t(x, y, z, \tau) = \frac{b_1}{(\sqrt{4\pi a\tau})^3} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}{4a\tau}\right], \quad (2)$$

де  $b_1 = \frac{Q_1}{c_p \rho}$  – коефіцієнт, що характеризує кількість теплоти підведеної джерелом,  $K \cdot m^3$ .

Те, що формула (2) дає розв'язок рівняння (1), перевіряється безпосередньою підстановкою. При цьому достатньо виконати перевірку для одновимірного випадку, який наведено нижче.

Із розв'язку (2) видно, що температура тіла прямує до нуля при  $\tau \rightarrow 0$  в усіх точках, за виключення одної точки  $(x_1, y_1, z_1)$ , де вона має нескінченно велике значення.

Якщо виконати інтегрування розв'язку (2) за усім об'ємом від  $-\infty$  до  $+\infty$ , то отримаємо, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y, z, \tau) dx dy dz = b_1.$$

Дійсно, для перевірки останньої формули спочатку вираз (2) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} t(x, y, z, \tau) &= \frac{b_1}{(\sqrt{4\pi a\tau})^3} \exp\left[\left(-\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}\right) + \left(-\frac{(y-y_1)^2}{4a\tau}\right) + \left(-\frac{(z-z_1)^2}{4a\tau}\right)\right] = \\ &= b_1 \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}\right] \exp\left[-\frac{(y-y_1)^2}{4a\tau}\right] \exp\left[-\frac{(z-z_1)^2}{4a\tau}\right]. \end{aligned}$$

Виконаємо інтегрування по всьому об'єму

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y, z, \tau) dx dy dz &= \\ &= b_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}\right] dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \exp\left[-\frac{(y-y_1)^2}{4a\tau}\right] dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \exp\left[-\frac{(z-z_1)^2}{4a\tau}\right] dz = \\ &= b_1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = b_1. \end{aligned}$$

Для інтегрування попереднього виразу використано заміну  $u = \frac{x-x_1}{\sqrt{4a\tau}}$ ,  $dx = \sqrt{4a\tau} du$ , яка зводить

обчислення до інтегралу Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} e^{-u^2} \sqrt{4\pi a\tau} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} e^{-u^2} \sqrt{4\pi a\tau} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = 1,$$

де  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$  – інтеграл Пуассона.

Функція (2)  $G(x_1, y_1, z_1, \tau, x, y, z) = t(x, y, z, \tau)$  називається *функцією температурного впливу* миттєвого джерела теплоти. Ця функція характеризується властивістю симетрії

$$G(x_1, y_1, z_1, \tau, x, y, z) = G(x, y, z, \tau, x_1, y_1, z_1),$$

яка є виразом принципу взаємності: дія в точці  $(x, y, z)$  джерела, що знаходиться в точці  $(x_1, y_1, z_1)$ , еквівалентна дії в точці  $(x_1, y_1, z_1)$  такого ж джерела, поміщеного в точку  $(x, y, z)$ . Однак відносно змінної  $\tau$  симетрія відсутня, що є наслідком *незворотності* теплових процесів у часі.

Визначимо вид функції  $G$  для інших випадків.

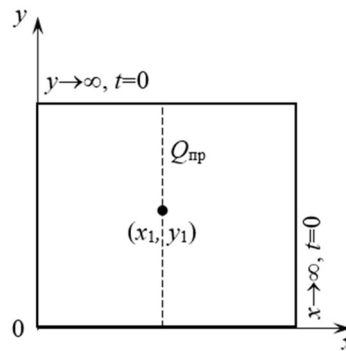
Розглянемо випадок двовимірного потоку теплоти. Нехай миттєве джерело теплоти зосереджено на вертикальній прямій з фіксованими  $(x_1, y_1)$ , де діє  $Q_{np}$  (Дж/м). На границі  $(x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty)$  підтримується температура  $t = 0$  (рис. 1).

Вираз

$$t(x, y, \tau) = \frac{b_2}{4\pi a \tau} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{4a\tau}\right], \quad (3)$$

задовольняє двовимірному диференційному рівнянню теплопровідності

$$\frac{\partial t(x, y, \tau)}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right).$$



**Рис. 1 – Двовимірний потік теплоти**

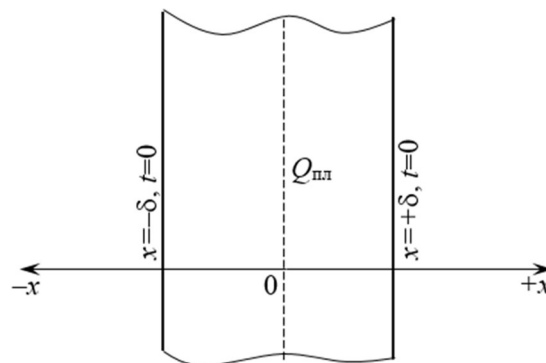
Вираз (3) є розв’язком задачі розподілу температури в необмеженому тілі у разі двовимірного потоку теплоти, що спричинений дією миттєвого джерела теплоти на прямій, яка проходить через точку  $(x_1, y_1)$  паралельно осі  $z$ , в момент часу  $\tau = 0$ . Інтегруючи (3) по координатах  $x$  і  $y$  аналогічно (2), отримуємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y, \tau) dx dy = b_2,$$

де  $b_2 = \frac{Q_{\text{пр}}}{c_p \rho}$  – коефіцієнт, що характеризує кількість теплоти підведеної джерелом,  $\text{K} \cdot \text{m}^2$ ;  $Q_{\text{пр}}$  – тепловиділення по довжині,  $\text{Дж/м}$ .

Розв’язок (3) може бути отриманий з (2), якщо припустити, що джерело теплоти розподілене по  $z$  від  $-\infty$  до  $+\infty$ , тобто змінити точкове джерело лінійним.

Розглянемо випадок одновимірного потоку теплоти. Нехай плоске джерело теплоти  $Q_{\text{пл}}$  ( $\text{Дж/м}^2$ ) в момент часу  $\tau = 0$  діє вздовж площини  $x = 0$  (рис. 2). На границях  $x = \pm \delta$ , де  $\delta$  достатньо велике (тобто фактично  $x \rightarrow \infty$ ) підтримується температура  $t = 0$ .



**Рис. 2 – Одновимірний потік теплоти**

Процес теплообміну, відповідно до рис. 2, описується одновимірним рівнянням теплопровідності вигляду

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Фундаментальний розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності (4) має вигляд

$$t(x, \tau) = \frac{b_3}{\sqrt{4\pi a \tau}} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}\right], \quad (5)$$

у чому можна переконатись безпосереднім диференціюванням (5). Похідна за часом  $\tau$

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \tau} &= -\frac{b_3}{2\tau\sqrt{4\pi a \tau}} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}\right] + \frac{b_3}{\sqrt{4\pi a \tau}} \frac{(x-x_1)^2}{4a\tau^2} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}\right] = \\ &= \frac{b_3}{\sqrt{4\pi a \tau}} \left[\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau^2} - \frac{1}{2\tau}\right] \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}\right]. \end{aligned}$$

Похідні по  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial x} &= \frac{b_3}{\sqrt{4\pi a \tau}} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}\right] \left[-\frac{2(x-x_1)}{4a\tau}\right]; \\ \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} &= \frac{b_3}{\sqrt{4\pi a \tau}} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}\right] \left[-\frac{2(x-x_1)}{4a\tau}\right] \left[-\frac{2(x-x_1)}{4a\tau}\right] + \\ &+ \frac{b_3}{\sqrt{4\pi a \tau}} \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}\right] \left(-\frac{2}{4a\tau}\right) = \\ &= \frac{b_3}{\sqrt{4\pi a \tau}} \left[\frac{(x-x_1)^2}{4a^2\tau^2} - \frac{1}{2a\tau}\right] \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}\right]. \end{aligned}$$

Помноживши вираз для  $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$  на  $a$ , отримуємо

$$a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{b_3}{\sqrt{4\pi a \tau}} \left[\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau^2} - \frac{1}{2\tau}\right] \exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{4a\tau}\right].$$

Порівнюючи отримані вирази для похідних  $\frac{\partial t}{\partial \tau}$  і  $a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ , приходимо до висновку, що вони тотожно рівні між собою, а це значить що рівняння (4) задовольняється.

Інтегруючи (5) по координаті  $x$  від  $-\infty$  до  $\infty$ , аналогічно (2) і (3), отримуємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} t(x, \tau) dx = b_3,$$

де  $b_3 = \frac{Q_{\text{пр}}}{c_p \rho}$  – коефіцієнт, що характеризує кількість теплоти підведеної джерелом, К·м.

Розглянемо температурне поле в нескінченному циліндрі під час дії миттєвого джерела теплоти. Нехай маємо тіло, що представляє собою товстий нескінченний вертикальний циліндр із зовнішньою поверхнею діаметра  $d_{\text{зовн}}$  і внутрішньою поверхнею діаметра  $d_{\text{вн}}$  (рис. 3). Задані властивості середовища  $\lambda, c_p, \rho$ .

Перейдемо до циліндричних координат  $(r, \varphi, z)$ , де  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ ,  $\sin \varphi = \frac{y}{r}$ , спрямувавши вісь  $z$  вздовж циліндра.

Розподіл температури  $t(r, \varphi, z, \tau)$  по  $z$  і  $\varphi$  примається однорідним, тобто

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0.$$

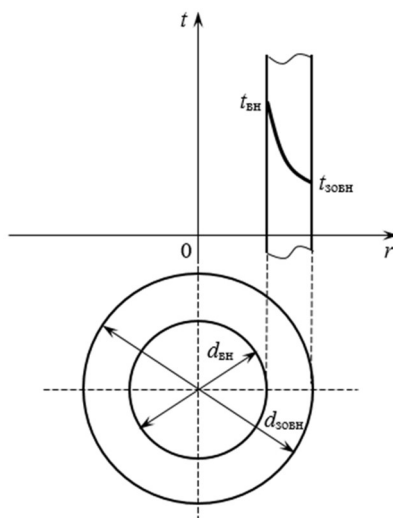


Рис. 3 – Температурне поле в нескінченному порожнистому циліндрі при  $\tau = 0$  с

Прийmemo для спрощення, що на гранях циліндра при  $r = \frac{d_{30BH}}{2}$  і  $r = \frac{d_{BH}}{2}$  підтримується температура  $t = 0$ .

У момент часу  $\tau = 0$  на поверхні  $r = r_1$  всередині циліндра діє миттєве джерело теплоти  $Q_{\text{и}} = c_p \rho b_2$  (Дж/м<sup>2</sup>).

Друга похідна від температури по координатах в декартовій і циліндричній системах координат має вигляд

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}.$$

Тому за наших умов, коли  $\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0$ , рівняння теплопровідності набуває вигляду

$$\frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right).$$

Фундаментальний розв'язок цього одновимірного рівняння має вигляд

$$t(r, \tau) = \frac{b_2}{4\pi a \tau} \exp\left(-\frac{r^2 - r_1^2}{4a\tau}\right) J_0\left(\frac{rr_1}{2a\tau}\right), \quad (6)$$

де  $y = J_0(x)$  – функція Бесселя, яка є розв'язком диференційного рівняння вигляду [11]

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0.$$

Вираз (6) є розв'язком задачі розподілу температури в необмеженому тілі, спричиненим дією миттєвого джерела теплоти  $Q_{\text{и}}$  на поверхні циліндра  $r = r_1$  в момент часу  $\tau = 0$ .

Виконавши інтегрування (6) по площині в полярних координатах ( $dx dy = r dr d\varphi$ ), аналогічно (2), (3) і (5), отримуємо

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} t(r, \tau) r dr d\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} t(r, \tau) r dr = b_2,$$

де  $b_2 = \frac{Q_{\text{и}}}{c_p \rho}$  – коефіцієнт, що характеризує кількість теплоти підведеної джерелом, К·м<sup>2</sup>.

Фундаментальний розв'язок (2) для тривимірного випадку і його різновиди (3), (5), (6) для одновимірних і двовимірних задач є прикладами *функцій Гріна*, які знаходять широке застосування в теорії потенціала [10, 11]. Функції Гріна визначаються всередині замкнутої поверхні, а в точці  $P(x_1, y_1, z_1)$  на поверхні прямують до нескінченності.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо застосування методу джерел для розв'язання практичних задач теплопровідності. Для цього спочатку розглянемо найпростіший випадок граничних умов I роду, коли температура поверхні тіла лишається незмінною на протязі всього процесу теплообміну. Це можливо за допомогою спеціальних приладів або шляхом теплообміну між тілом та оточуючим середовищем за законом Ньютона-Ріхмана, але при  $(\alpha \rightarrow \infty, t_* = \text{const})$ . У цьому випадку граничні умови III роду перетворюються на граничні умови I роду в найпростішому їх вигляді.

Необмежене тіло (пластина). Нехай маємо тверде тіло, розміри якого дуже великі порівняно з його ділянкою, що нас цікавить, то таке тіло можна вважати необмеженим. При цьому необхідно, щоб помітна зміна температурного поля відбувалась *тільки на вказаній ділянці тіла*.

Спочатку розглянемо задачу, коли температура змінюється тільки в напрямку координати  $x$ . Дано:

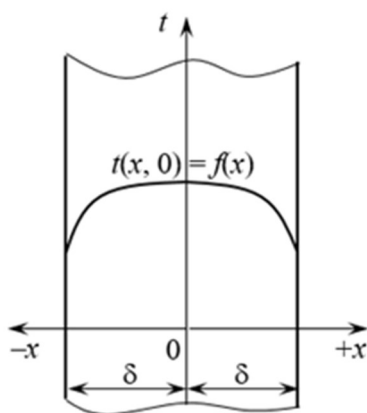
1. Необмежене тіло.
2. Зміна температури відбувається в напрямку  $x$ , тобто

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0.$$

Ізотермічні поверхні представляють собою площини паралельні площині  $yOz$  і позначаються  $F$ .

3. В момент часу  $\tau = 0$  задано розподіл температури в напрямку  $x$  у вигляді  $t(x, 0) = f(x)$  (рис. 4).
4. Граничні умови відсутні, але їх можна замінити умовою, що враховує необмеженість розмірів тіла

$$\frac{\partial t(+\infty, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial t(-\infty, \tau)}{\partial x} = 0.$$



**Рис. 4 – Температурне поле в необмеженій пластині при  $\tau = 0$  с**

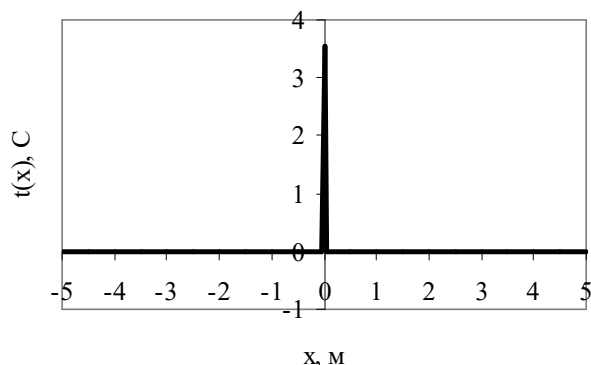
Рівняння теплопровідності для цього випадку має вигляд

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}.$$

Раніше було показано, що частинний розв'язок цього рівняння для миттєвого джерела теплоти має вигляд (5)

$$t(x, \tau) = \frac{b_3}{\sqrt{4\pi a \tau}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a\tau}\right], \quad x_1 = \xi. \quad (7)$$

Проаналізуємо цей розв'язок (рис. 5).



$$\lambda = 16,5 \text{ Вт/(м·К)}; c_p = 490 \text{ Дж/(кг·К)}; \rho = 7800 \text{ кг/м}^3; a = 4,317 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с};$$

$$\tau = 1 \text{ с}; \xi = 0 \text{ м}; Q_{\text{пл}} = 10^5 \text{ К·м}$$

**Рис. 5 – Графік функції (7)**

Із аналізу розв'язку (7) видно, що при заданому часі  $\tau$  крива розподілу температури в напрямку  $x$  має максимум, який знаходиться на відстані  $x = \xi = 0$  (рис. 5). Площа під кривою є кінцева величина, що дорівнює інтегралу від (7) в границях від  $-\infty$  до  $+\infty$  (початок координат перемістимо в точку  $\xi$ ). Тоді

$$S = b_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a \tau}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}\right] dx$$

Виконаємо заміну змінної  $u = \frac{x-\xi}{\sqrt{4a\tau}}$ ,  $dx = \sqrt{4a\tau} du$ , отримаємо

$$S = b_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a \tau}} e^{-u^2} \sqrt{4a\tau} du = \frac{b_3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = b_3.$$

Таким чином, площа під кривою (рис. 5) дорівнює  $b_3$  (К·м), а кількість теплоти, що виділяється на одиницю площі поверхні становить  $Q_{\text{пр}} = c_p \rho b_3$  (Дж/м<sup>2</sup>). Тобто площа під кривою по суті є кількістю теплоти, що розповсюджується в напрямку  $x$ .

Із розв'язку (7) отримуємо, що значення температури (ордината) в точці максимуму дорівнює

$$t_{\text{max},\tau} = \frac{b_3}{\sqrt{4\pi a \tau}}.$$

Отже, зі збільшенням часу  $\tau$  ордината зменшується, а крива  $t(x, \tau)$  стає більш пологою (рис. 5), і навпаки, зі зменшенням  $\tau$  ордината збільшується. При  $\tau \rightarrow 0$  отримуємо нескінченно вузьку смужку, але її площа не змінюється і дорівнює  $b_3$ .

Користуючись цією властивістю розв'язку (7), заданий початковий розподіл температури  $t(x,0) = f(x)$  ( $\tau = 0$ ) в необмеженому тілі можна представити як суму окремих частинних розв'язків виду (7), тобто  $f(x)$  замінити сумою нескінченної множини кривих «джерел» вигляду

$$\frac{b_3}{\sqrt{4\pi a \tau}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}\right]. \quad (8)$$

При цьому необхідно відмітити, що не дивлячись на нескінченно малу ширину смужки  $d\xi$  (рис. 5) висота її буде кінцевою величиною і дорівнювати  $f(\xi)$ . Вказану смужку можна замінити на криву «джерело» (8), помножену на такий коефіцієнт  $C$ , щоб площа під кривою дорівнювала площі смужки  $f(\xi)d\xi$ . Оскільки



площа під кривою (8) дорівнює  $b_3$ , отримуємо, що  $C = \frac{f(\xi)}{b_3} d\xi$ . Виконуючи нескінченне підсумовування (інтегрування) отримуємо, що повний початковий розподіл температури в необмеженому тілі дорівнює

$$t(x,0) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_3}{\sqrt{4\pi a\tau}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}\right] \frac{f(\xi)}{b_3} d\xi.$$

Це співвідношення справедливе не тільки для початкового моменту часу  $\tau = 0$ , але і для будь-якого наступного проміжку часу, оскільки кількість теплоти  $Q_{np}$  зберігається  $b_3 = \text{const}$ . Таким чином, загальний розв'язок нашої задачі буде мати такий вигляд

$$t(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}\right] d\xi. \quad (9)$$

За допомогою введення нової змінної  $u$ , розв'язок (9) можна переписати дещо по іншому

$$u = \frac{x-\xi}{\sqrt{4a\tau}}; \quad u^2 = \frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}; \quad \xi = x + u\sqrt{4a\tau}; \quad d\xi = \sqrt{4a\tau} du.$$

Тому

$$t(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + u\sqrt{4a\tau}) e^{-u^2} \sqrt{4a\tau} du.$$

або

$$t(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + u\sqrt{4a\tau}) e^{-u^2} du. \quad (10)$$

Можна показати, що (10) задовольняє диференційному рівнянню (4) і початковій умові – при  $\tau \rightarrow 0$  маємо, що  $f(x + u\sqrt{4a\tau}) \rightarrow f(x)$ , тобто

$$t(x,0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = f(x).$$

Якщо  $f(x) = t(x,0) = \text{const} = t_0$ , то із (10) отримуємо, що

$$t(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t_0 e^{-u^2} du = t_0.$$

Таким чином *температура залишається незмінною* на ділянці, що розглядається (рис. 4).

Розглянемо напівобмежене тіло. Нехай маємо нескінченно довгий стрижень, обмежений з одного боку площиною  $yOz$ , а з другого – простягається в нескінченність. На бічній поверхні знаходиться ідеальна теплоізоляція. Дано:

1. Температура напівобмеженого тіла у всіх точках має певне значення, задане деякою функцією  $f(x)$ , тобто  $f(x) = t(x,0)$ .
2. У початковий момент часу кінець стрижня приймає температуру  $t_c$ , яка підтримується сталою на протязі всього процесу теплообміну –  $t_c = \text{const}$ .
3. Задано властивості матеріалу стрижня:  $\lambda, c_p, \rho, a$ .

Потрібно знайти  $t(x,\tau)$ .

Будемо розв'язувати задачу на охолодження тіла, оскільки задача на нагрівання тіла завжди може бути зведена до задачі на охолодження шляхом заміни змінної.

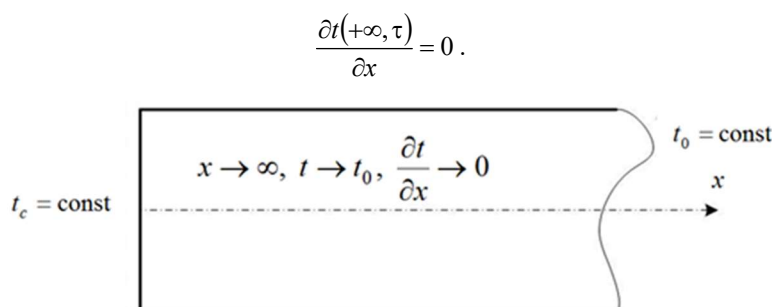
Відповідно до вказаних обмежень маємо наступне формулювання задачі:

$$\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2}, \quad \tau \geq 0, \quad 0 \leq x < \infty,$$

при крайових умовах:

$$t(x,0) = f(x), \quad t(0,\tau) = t_c = \text{const},$$

у нескінченно віддаленій точці стрижня відсутній перепад температури (рис. 6), тобто



**Рис. 6 – Напівобмежене тіло (стрижень) за граничних умов I роду**

Спочатку для спрощення розрахунків приймемо, що  $t_c = 0$ .

Розв'язок цієї задачі може бути отриманий з попередньої задачі (для необмеженого тіла). Для цього подовжимо стрижень у від'ємному напрямку осі  $x$ , тобто будемо вважати його необмеженим (рис. 6). Початкова температура в точці  $x > 0$  дорівнює  $f(x)$ , а початкову температуру в точці  $-x$  вибираємо рівною  $-f(x)$ , тобто приймаємо, що  $f(x)$  непарна функція

$$f(x) = -f(-x).$$

Тоді з міркувань симетрії розподілу температури в наступні моменти часу  $f(x)$  буде непарною функцією, а для  $x = 0$  її значення завжди буде рівним 0. Отже, умова на поверхні виконується.

Отриманий раніше на основі методу джерел розв'язок (9) напишемо для випадку непарної функції  $f(x)$

$$t(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \left[ \int_{-\infty}^0 -f(-\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}\right] d\xi + \int_0^{+\infty} f(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}\right] d\xi \right].$$

Зробимо заміну змінної в першому інтегралі  $\xi = -\xi'$

$$\begin{aligned} t(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \left[ \int_{+\infty}^0 f(\xi') \exp\left[-\frac{(x+\xi')^2}{4a\tau}\right] d\xi' + \int_0^{+\infty} f(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}\right] d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \left\{ \int_0^{+\infty} f(\xi) \left[ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a\tau}\right] \right] d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Вираз (11) є загальним розв'язком задачі.

Якщо початкова температура стала величина і не залежить від  $x$  (температура стрижня в початковий момент часу однакова і дорівнює  $t_0$ ), тобто

$$t(x, 0) = f(x) = t_0 = \text{const} \text{ при } x > 0,$$

то розв'язок можна спростити. При цьому передбачається, що на кінці стрижня підтримується температура  $t(0, \tau) = t_c = 0$ , тобто в початковий момент часу функція розподілу температури має розрив.

Проведемо заміну змінної в першій частині підінтегрального виразу в (11):

$$u = \frac{x-\xi}{\sqrt{4a\tau}}; \quad \xi = x + 2u\sqrt{a\tau}; \quad d\xi = 2\sqrt{a\tau} du$$

і в другій його частині:

$$u = \frac{\xi+x}{\sqrt{4a\tau}}; \quad \xi = -x + 2u\sqrt{a\tau}; \quad d\xi = 2\sqrt{a\tau} du.$$

Тоді

$$t(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} t_0 \left( \int_{-\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}}^{+\infty} e^{-u^2} 2\sqrt{a\tau} du - \int_{\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}}^{+\infty} e^{-u^2} 2\sqrt{a\tau} du \right) =$$

$$= t_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}}^{\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}} e^{-u^2} du = t_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}} e^{-u^2} du = t_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right).$$

Тут, під час перетворень, використано те, що функція  $f(u) = e^{-u^2}$  парна, тобто  $f(u) = f(-u)$ , і тому  $\int_{-a}^a f(u) du = 2 \int_0^a f(u) du$ .

Функція

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du, \quad (12)$$

називається *функцією помилок Гауса* [8, 12].

Остаточо маємо, що

$$\frac{t(x, \tau)}{t_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right), \quad (13)$$

Функція  $\operatorname{erf}(x)$  змінюється від 0, коли  $x = 0$ , до 1, коли  $x \rightarrow +\infty$  (практично при  $x > 2,7$ , оскільки  $\operatorname{erf}(2,7) = 0,999$ ).

Якщо кінець стрижня підтримується не при 0, а при деякій температурі відмінній від 0, тобто  $t(0, \tau) = t_c = \text{const}$ , то шляхом введення нової змінної  $v = t - t_c$  вихідна задача зводиться до вище розглянутої, оскільки

$$v(0, \tau) = t(0, \tau) - t_c = 0.$$

Отже, розв'язок даної задачі зводиться до розглянутої вище

$$\frac{t(x, \tau) - t_c}{t_0 - t_c} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right). \quad (14)$$

Вираз (14) є шуканим розв'язком задачі охолодження нескінченно довгого стрижня за граничних умов I роду.

Розглянемо визначення кількості теплоти, що втрачається напівобмеженим стрижнем під час охолодження. Втрата теплоти  $dq_\tau$  (Дж/м<sup>2</sup>) за час  $d\tau$  крізь одиницю площі дорівнює

$$dq_\tau = -\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=0} d\tau = -\lambda(t_0 - t_c) \left. \frac{\partial}{\partial x} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right] \right|_{x=0} d\tau,$$

Із визначення функції  $\operatorname{erf}(x)$  (12) отримуємо, що

$$\frac{d \operatorname{erf}(x)}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},$$

звідки

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi a\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right).$$

При  $x = 0$  права частина цього рівняння дорівнює  $\frac{1}{\sqrt{\pi a\tau}}$ . Тоді для визначення густини теплового потоку  $q$  (Вт/м<sup>2</sup>) отримуємо таке співвідношення

$$q = \frac{dq_\tau}{d\tau} = -\frac{\lambda(t_0 - t_c)}{\sqrt{\pi a\tau}} = -\sqrt{\lambda c_p \rho} (t_0 - t_c) \frac{1}{\sqrt{\pi \tau}}. \quad (15)$$

Таким чином, густина теплового потоку  $q$  з поверхні тіла прямопропорційна різниці температур  $(t_0 - t_c)$  з деяким коефіцієнтом  $\sqrt{\lambda c_p \rho}$  і обернено пропорційна  $\sqrt{\tau}$ .

Отже, в перший момент часу величина  $q$  нескінченно велика, а згодом поступово зменшується. Термічна стала  $\varepsilon$  (Дж/(м<sup>2</sup>·К·с<sup>0.5</sup>)), визначається за формулою

$$\varepsilon = \sqrt{\lambda c_p \rho}$$

і називається *тепловою активністю тіла* або *коефіцієнтом акумуляції теплоти*.

Кількість теплоти, що втрачається тілом (стрижнем) упродовж кінцевого проміжку часу  $\tau$  можна знайти за допомогою інтегрування виразу (14) в границях від 0 до  $\tau$ .

$$q_\tau = q_0 - \int_0^\tau \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi \tau}} (t_0 - t_c) d\tau = q_0 - \frac{2\varepsilon\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} (t_0 - t_c),$$

Кількість теплоти, що втрачається торцем стрижня, площа якого дорівнює  $S$ , буде дорівнювати

$$\Delta Q_\tau = \frac{2\varepsilon\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} (t_0 - t_c) S.$$

Розглянемо задачу нагрівання нескінченно довгого стрижня за граничних умов I роду. У наведених вище задачах розглядається охолодження тіла з деякої початкової температури за умови, що поверхня тіла в початковий момент часу приймає деяку температуру, яка підтримується сталою на протязі всього процесу охолодження ( $t_n = t_c = \text{const}$ ).

Задачу на нагрівання тіла деякою заданою початковою температурою  $t_0$ , коли температура поверхні в початковий момент часу миттєво стає сталою і дорівнює  $t_c$  (де  $t_c > t_0$ ) можна звести до задачі охолодження тіла шляхом простої заміни змінної.

Математичне формулювання задачі на охолодження можна записати таким чином:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t, \quad t(0) = t_0, \quad t_n = t_c, \quad t_n < t_0.$$

Виконаємо заміну змінної  $v = t_0 - t$ . Тоді будемо мати:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = a \nabla^2 v, \quad v(0) = v_0, \quad v_n = t_0 - t_c = v_c.$$

Таким чином, отримали задачу на нагрівання тіла, коли початкова температура  $v(0) = v_0$ , а температура поверхні тіла дорівнює  $v_c(0) = t_0 - t_c = \text{const}$ . Отже, всі виведені формули справедливі і для задач нагрівання тіла, тільки під  $\Theta$  потрібно розуміти:

$$\Theta = \frac{t - t_c}{t_0 - t_c} \quad \text{при охолодженні} \quad (t_0 > t_c);$$

$$\Theta = \frac{t_c - t}{t_c - t_0} = 1 - \frac{t - t_c}{t_0 - t_c} \quad \text{при нагріванні} \quad (t_c > t_0).$$

Таким чином, при переході до задачі нагрівання в розв'язку для охолодження тіла безрозмірну величину  $\Theta$  потрібно замінити на  $\frac{t_c - t}{t_c - t_0}$  або на  $1 - \frac{t - t_c}{t_0 - t_c}$ .

Значить при нагріванні нескінченно довгого стрижня за граничних умов I роду будемо мати, що

$$\Theta = \frac{t(x, \tau) - t_c}{t_0 - t_c} = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right), \quad (16)$$

де  $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$  – додаткова функція помилок.

Проаналізуємо розв'язок (16) для визначення температурного поля під час нагрівання напівобмеженого стрижня за граничних умов I роду.

Використовуючи позначення безрозмірної температури  $\Theta$  і часу  $Fo_x = a\tau/x^2$ , отримаємо вираз для безрозмірної температури залежно від числа Фур'є

$$\Theta(Fo_x) = \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{Fo_x}}\right). \quad (17)$$

Вираз (17) можна використати для побудови графіка для оперативного визначення  $\Theta$  як функції від  $Fo_x$  (рис. 7).

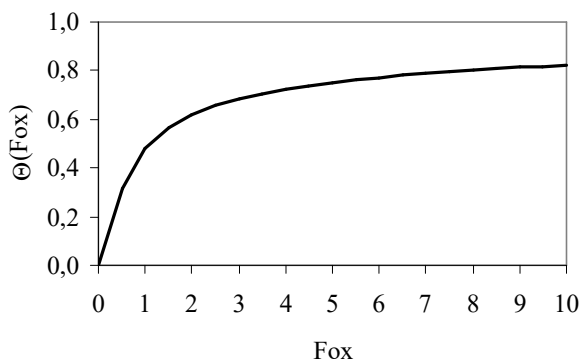
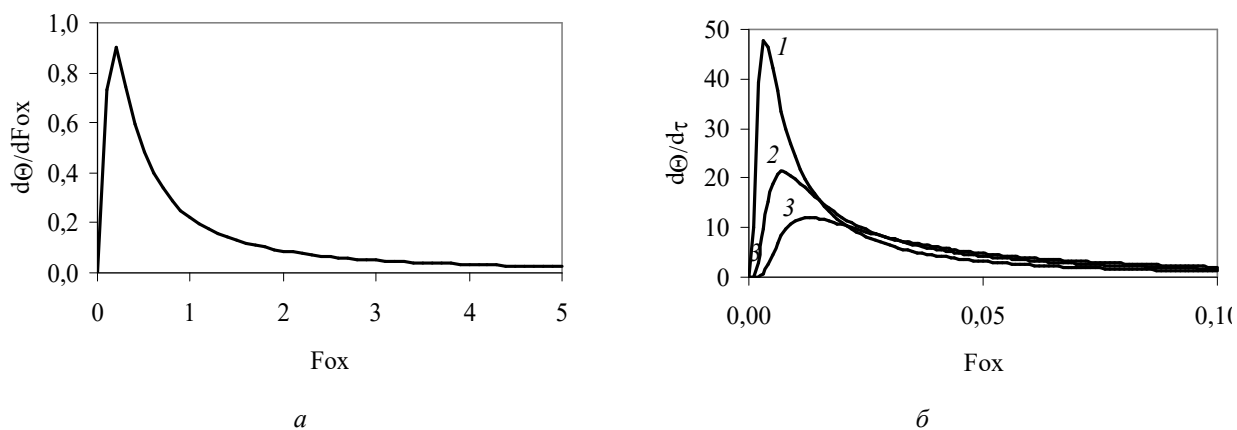


Рис. 7 – Графік  $\Theta = f(Fo_x)$  під час нагрівання напівобмеженого стрижня за граничних умов I роду. Область визначення  $\Theta(Fo_x)$   $(0; +\infty)$

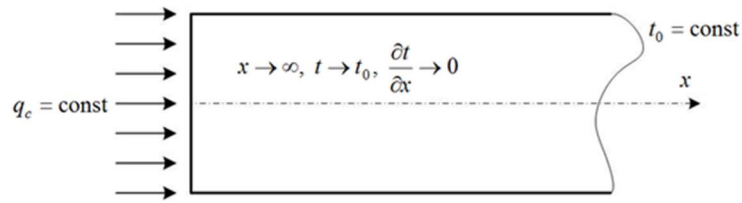
Похідна  $\frac{d\Theta(Fo_x)}{dFo_x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi Fo_x^3}} \exp\left(-\frac{1}{4Fo_x}\right)$  має максимум, тобто можна отримати максимальну швидкість нагрівання. Максимум  $\frac{d\Theta(Fo_x)}{dFo_x}$  має місце при  $Fo_x = \frac{1}{6}$  (рис. 8,а), а похідна  $\frac{d\Theta(x)}{d\tau} = \frac{ax}{2\sqrt{\pi a^3 \tau^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right)$  має екстремуми при  $\tau = \frac{x^2}{6a}$  (рис. 8,б), величина і час настання яких залежить від  $x$ .



1 –  $x = 0,5$  мм; 2 –  $x = 0,75$  мм; 3 –  $x = 1,0$  мм;  $a = 1,265 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$  – Ст. 20

Рис. 8 – Графіки похідних  $\frac{d\Theta(Fo_x)}{dFo_x}$  (а) і  $\frac{d\Theta(x, \tau)}{d\tau}$  (б)

Роглянемо задачу нагрівання нескінченно довгого стрижня за граничних умов II роду. Нехай маємо напівобмежений довгий стрижень, бічна поверхня якого ізольована, за умови, що ширина й товщина стрижня незначні порівняно з довжиною (рис. 9).



**Рис. 9 – Напівобмежене тіло (стрижень) за граничних умов II роду**

Математичне формулювання задачі знаходження розподілу температури при граничних умовах II роду має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \tau} &= a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad (\tau \geq 0, \quad 0 \leq x < \infty), \\ t(x, 0) &= t_0 = \text{const}, \\ \lambda \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} + q_c &= 0, \\ t(\infty, \tau) &= t_0, \quad \frac{\partial t(\infty, \tau)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Сформульовану задачу можна звести до задачі теплопровідності з граничними умовами I роду. Для цього замість змінної  $t$  введемо нову змінну  $q$

$$q(x, \tau) = -\lambda \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x}. \quad (19)$$

Виконаємо диференціювання рівняння теплопровідності (18) по  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{t(x, \tau)}{\partial \tau} \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} \right], \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{t(x, \tau)}{\partial x} \right] &= a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right]. \end{aligned}$$

З врахуванням (19) отримуємо, що

$$\frac{\partial q(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 q(x, \tau)}{\partial x^2}.$$

Таким чином отримали звичайний вид рівняння теплопровідності, але замість змінної  $t$  у нього входить змінна  $q$ . Початкові і граничні умови для нової змінної мають вигляд:

$$q(x, 0) = 0, \quad q(0, \tau) = q_c = \text{const}, \quad q(\infty, \tau) = 0.$$

За аналогії з (16) для  $t(x, \tau)$  будемо мати для  $q(x, \tau)$

$$\frac{q(x, \tau) - q_c}{q_0 - q_c} = \text{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right).$$

Для спрощення припустимо, що  $t_0 = 0$ ,  $q_0 = 0$ . Тоді отримуємо

$$\begin{aligned} -\frac{q(x, \tau) - q_c}{q_c} &= \text{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right), \\ 1 - \frac{q(x, \tau)}{q_c} &= \text{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right), \end{aligned}$$

$$q(x, \tau) = q_c \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right). \quad (20)$$

Із (20) отримуємо, що

$$-\lambda \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} = q_c \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right),$$

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} = -\frac{q_c}{\lambda} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right).$$

Виконаємо інтегрування останнього виразу від  $x$  до  $+\infty$

$$\int_x^{+\infty} \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} dx = -\frac{q_c}{\lambda} \int_x^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) dx. \quad (21)$$

Спочатку обчислимо ліву частину (21)

$$\int_x^{+\infty} \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} dx = t|_x^{+\infty} = -t(x, \tau),$$

оскільки  $t(+\infty, \tau) = 0$ .

У правій частині співвідношення (21) зробимо заміну  $u = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}$

$$\int_x^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) dx = \int_{\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}}^{+\infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) 2\sqrt{a\tau} d\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) = 2\sqrt{a\tau} \int_u^{+\infty} \operatorname{erfc}(u) du.$$

Введемо інтегральну функцію

$$\operatorname{ierfc}(u) = \int_u^{+\infty} \operatorname{erfc}(u) du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} - u \cdot \operatorname{erfc}(u).$$

Остаточно з (21) отримуємо вираз для визначення розподілу температури по довжині стрижня у різні моменти часу за граничних умов II роду

$$t(x, \tau) = \frac{2q_c \sqrt{a\tau}}{\lambda} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right),$$

де  $q_c$  – густина теплового потоку на торці стрижня, Вт/м<sup>2</sup>.

**Висновки.** Проаналізовано фундаментальний розв'язок Кельвіна тривимірного нестационарного рівняння теплопровідності у разі дії точкового миттєвого джерела теплоти. Також розглянуто різновиди фундаментального розв'язку Кельвіна для одновимірних і двовимірних задач теплопровідності, які є прикладами функцій Гріна і знайшли широке застосування в теорії потенціалу.

Отримано та проаналізовано аналітичні розв'язки нестационарного рівняння теплопровідності за граничних умов I і II родів напівобмеженого стрижня для режимів охолодження/нагрівання, що є зручними для практичного застосування в інженерних розрахунках. Показано, що функціональні залежності для визначення температури та густини теплового потоку під час нагрівання за граничних умов I і II родів можна отримати з розв'язку рівняння теплопровідності для режиму охолодження за умов I роду за допомогою простої заміни змінної.

Показано, що функціональна залежність похідної  $d\Theta(\text{Fo}_x)/d\text{Fo}_x$  має екстремум при  $\text{Fo}_x = 1/6$ , а  $d\Theta(x)/d\tau$  – відповідно при  $\tau = x^2/6a$ , величина і час настання якого залежить від  $x$ , де  $\Theta$  – безрозмірна температура,  $\text{Fo}_x$  – число Фур'є,  $\tau$  – час, с;  $x$  – координата, м;  $a$  – температуропровідність, м<sup>2</sup>/с. З використанням отриманих значень екстремумів можна відслідковувати координату і час настання максимальної швидкості нагрівання в напівобмеженому стрижні, або максимальну швидкість охолодження під час охолодження.

**Перспективи подальших досліджень.** Подальші дослідження планується продовжити в напрямках: оптимізації температурних режимів зміцнення матеріалів за допомогою інфрачервоного лазерного випромінювання; розробки обернених коефіцієнтних задач на базі отриманих аналітичних розв'язків з метою визначення температурних залежностей теплофізичних властивостей матеріалів, зокрема композиційних.

#### **Список використаної літератури**

1. Theory and Solutions of Heat Pulse Method for Determining Soil Thermal Properties / Wang J., He D., Dyck M., He H. // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. 2020. Vol. 440. Article 052039. DOI: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/440/5/052039>
2. Karmakar S., Sarkar S.P. Instantaneous Heat Source Response in a Rotating Orthotropic Thermoelastic Medium Using Three-Phase-Lag Model. // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59. P. 1614-1634. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0025654424600090>
3. Shendeleva M. L. Instantaneous line heat source near a plane interface // Journal of Applied Physics. 2004. Vol. 95, N 5. P. 2839-2845. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1643777>
4. Applicable conditions of instantaneous source used for welding heat conduction / T. Terasaki, T. Kitamura, T. Akiyama, M. Nakatani // Science and Technology of Welding and Joining. 2005. Vol. 10, Issue 6. P. 701-705. DOI: <https://doi.org/10.1179/174329305X65032>
5. Iacobescu G. A theoretical model for welding process with Gaussian heat source – Part 1. // U.P.B. Sci. Bull., Series D. 2006. Vol. 68, N. 4. P. 45-50. URL: [https://www.scientificbulletin.upb.ro/rev\\_docs\\_arhiva/full17380.pdf](https://www.scientificbulletin.upb.ro/rev_docs_arhiva/full17380.pdf)
6. Nondestructive techniques for determining the thermophysical characteristics of materials by the instantaneous-heat-source method / Arutyunov B. A., Grigorivker I. M., Fesenko A. I., Shteinbrekher V. V. // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 1997. Vol. 70. P. 846-852. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-997-0032-x>
7. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. Boundary element techniques. Theory and applications in engineering. Berlin : Springer-Verlag, 1984. 464 p. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-48860-3>
8. Andrews L. C. Special functions of mathematics for engineers. Second Edition. Washington : SPIE Press, 1998. 500 p. URL: <https://spie.org/publications/book/872135>
9. Evans L. C. Partial Diferential Equations. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19 (2nd ed.), Providence, RI: American Mathematical Society, 2010. 662 p. URL: <https://math24.wordpress.com/wp-content/uploads/2013/02/partial-differential-equations-by-evans.pdf>
10. Eyges L. The Classical Electromagnetic Field. New York : Dover Publications, 1972. 240 p. URL: [https://books.google.com.pe/books?id=xuAs\\_45\\_-LwC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false](https://books.google.com.pe/books?id=xuAs_45_-LwC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false)
11. Polyanin A. D. Handbook of Linear Partial Diferential Equations for Engineers and Scientists. New-York : Chapman & Hall/CRC Press, 2002. 667 p. URL: <https://sharif.edu/~asghari/Handbook%20of%20linear%20partial%20differential%20equations%20for%20engineers%20and%20scientists%20-%20Polyanin.pdf>
12. Whittaker E. T., Watson G. N. A Course of Modern Analysis. 5th revised ed. Cambridge University Press, 2021. 668 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/9781009004091>

---

***Yevhen Panov, Larysa Didenko***

#### **APPLICATION OF THE SOURCE METHOD FOR SOLVING PRACTICAL PROBLEMS OF HEAT CONDUCTIVITY**

*The subject of the study is analytical solutions of the non-stationary heat equation for practical application in engineering calculations. The aim of the work is to obtain and analyze analytical solutions of the non-stationary heat equation under type I and type II boundary conditions of a semi-infinite rod using the method of instantaneous sources and the fundamental Kelvin solution. The research methodology is based on potential theory, the method of instantaneous sources and the Gauss error functions. The fundamental Kelvin solution, or the temperature effect function of the instantaneous source of the three-dimensional non-stationary heat equation in the case of the initial point source of heat is analyzed. Variants of the fundamental Kelvin solution for one-dimensional and two-dimensional heat conduction problems, which are examples of Green's functions and have wide applications in*



potential theory, are also considered. Analytical solutions of the non-stationary heat equation under type I and type II boundary conditions of a semi-infinite rod for cooling/heating regimes are obtained and analyzed, which is convenient for practical application in engineering calculations. It is shown that the functional dependencies for determining the temperature and heat flux density during heating under type I and type II boundary conditions can be obtained from the solution of the heat equation for the cooling mode under type I boundary conditions using a simple change of variable. It is shown that the derivatives  $d\Theta(\text{Fo}_x)/d\text{Fo}_x$  and  $d\Theta(x)/d\tau$  have an extremum at  $\text{Fo}_x = 1/6$  and  $\tau = x^2/6a$  respectively, the magnitude and time of occurrence of the extremum depends on  $x$ , where  $\Theta$  – dimensionless temperature,  $\text{Fo}_x$  – Fourier number,  $\tau$  – time, s;  $x$  – coordinate, m;  $a$  – temperature conductivity,  $\text{m}^2/\text{s}$ . Using the obtained extremum values, it is possible to track the coordinate and time of the maximum heating rate in a semi-infinite rod, or the maximum cooling rate during cooling. The obtained solutions of the non-stationary heat equation of a semi-infinite rod can be used for the operational determination of rational thermal parameters during laser hardening of materials, the study of temperature dependences of thermophysical properties of materials, in particular composite ones, etc.

**Keywords:** heat equation, boundary conditions, fundamental solution, semi-constrained rod, temperature conductivity, heating rate

### References

1. Wang, J., He, D., Dyck M., He H. (2020). Theory and Solutions of Heat Pulse Method for Determining Soil Thermal Properties. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science*, vol. 440, article 052039. doi: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/440/5/052039>
2. Karmakar, S., Sarkar, S. P. (2024). Instantaneous Heat Source Response in a Rotating Orthotropic Thermoelastic Medium Using Three-Phase-Lag Model. *Mechanics of Solids*, vol. 59, pp. 1614-1634. doi: <https://doi.org/10.1134/S0025654424600090>
3. Shendeleva, M. L. (2004). Instantaneous line heat source near a plane interface. *Journal of Applied Physics*, vol. 95, no 5, pp. 2839-2845. doi: <https://doi.org/10.1063/1.1643777>
4. Terasaki, T., Kitamura, T., Akiyama, T., Nakatani M. (2005). Applicable conditions of instantaneous source used for welding heat conduction. *Science and Technology of Welding and Joining*, vol. 10, issue 6, pp. 701-705. doi: <https://doi.org/10.1179/174329305X65032>
5. Iacobescu, G. (2006). A theoretical model for welding process with Gaussian heat source – Part 1. *U.P.B. Sci. Bull., Series D*, vol. 68, no. 4, pp. 45-50.
6. Arutyunov, B. A., Grigorivker, I. M., Fesenko, A. I., Shteinbrekher V. V. (1997). Nondestructive techniques for determining the thermophysical characteristics of materials by the instantaneous-heat-source method. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 70, pp. 846-852. doi: <https://doi.org/10.1007/s10891-997-0032-x>
7. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C. (1984). Boundary element techniques. Theory and applications in engineering. Springer-Verlag, Berlin. 464 p. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-48860-3> (Accessed November 11, 2024)
8. Andrews, L. C. (1998). Special functions of mathematics for engineers. Second Edition. SPIE Press, Wachington. 473 p. URL: <https://spie.org/publications/book/872135> (Accessed October 11, 2024)
9. Evans, L. C. (2010). Partial Diferential Equations. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19 (2nd ed.), Providence, RI: American Mathematical Society. 662 p. [http://www.scholarpedia.org/article/Partial\\_differential\\_equation](http://www.scholarpedia.org/article/Partial_differential_equation) (Accessed November 11, 2024)
10. Eyges, L. (1972). The Classical Electromagnetic Field. Dover Publications, New York. 240 p. URL: [https://books.google.com.pe/books?id=xuAs\\_45\\_-LwC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false](https://books.google.com.pe/books?id=xuAs_45_-LwC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false)
11. Polyanin, A. D. (2002). Handbook of Linear Partial Diferential Equations for Engineers and Scientists. Chapman & Hall/CRC Press, New-York. 667 p. URL: <https://sharif.edu/~asghari/Handbook%20of%20linear%20partial%20differential%20equations%20for%20engineers%20and%20scientists%20-%20Polyanin.pdf>
12. Whittaker, E. T., Watson, G. N. (2021). A Course of Modern Analysis. 5th revised ed. Cambridge University Press. 668 p. doi: <https://doi.org/10.1017/9781009004091>