

ДИСКРЕТНІ ФОРМИ МАТЕМАТИЧНОГО ОПИСУ НАПІРНОГО ЯЩИКА З ПОВІТРЯНОЮ ПОДУШКОЮ

Розроблено дискретні математичні моделі напірного ящика з повітряною подушкою папероробних машин як об'єкта керування рівнем маси у напускній камері й тиском повітря в повітряній подушці. Показано, що математична модель напірного ящика з повітряною подушкою може бути представлена рекурентними різницевими рівняннями, матрицею дискретних передавальних функцій, векторно-матричним рівнянням стану системи, числовими послідовностями.

Ключові слова: папероробна машина, напірний ящик з повітряною подушкою, дискретна математична модель.

© Жученко А. І., Піргач М. С., Жураковський Я. Ю., 2017.

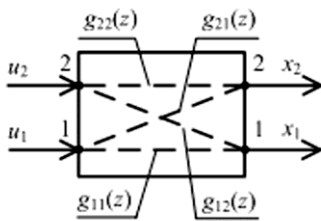


Рис. 1 – Загальна структурна схема напірного ящика з повітряною подушкою як об'єкта керування рівнем маси й тиском повітря

Постановка задачі. Відомо [1], що напірний ящик з повітряною подушкою (НЯ з ПП) як об'єкт керування (ОК) рівнем маси й тиском повітря являє собою двовимірний ОК з двома прямими 11 і 22 та двома перехресними 12 і 21 каналами (рис. 1).

Для ідентифікації цього двовимірного ОК (системи) і побудови дискретної системи автоматичного керування (ДСАК) ним потрібно мати відповідні математичні моделі НЯ з ПП.

Метою статті є створення відповідних математичних моделей НЯ з ПП, за допомогою яких виконується його ідентифікація та розробка ДСАК, реалізованої на мікроЕОМ.

1. Представлення напірного ящика рекурентними різницевими рівняннями

Відомо [1], що НЯ з ПП як ОК рівнем маси і тиском повітря можна представити наступною системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} T_{11} \frac{dx_1}{dt} + x_1(t) = k_{11}u_1(t) - k_{12}x_2(t); \\ T_{22} \frac{dx_2}{dt} + x_2(t) = k_{21} \frac{dx_1}{dt} + k_{22}u_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

де $x_1(t)$ – рівень маси у напускній камері; $x_2(t)$ – тиск повітря в ПП; $u_1(t)$ – витрата маси, що подається у напускну камеру; $u_2(t)$ – витрата повітря, що подається в ПП; T_{11} і T_{22} – стала часу напускної камери і повітряної подушки; k_{11} , k_{12} , k_{21} і k_{22} – коефіцієнт підсилення каналів 11, 21, 12 і 22.

Систему диференціальних рівнянь (1) можна подати рекурентними різницевими рівняннями [2]:

$$x_1(i+2) = \left(2 - \frac{a_1}{a_0}T\right)x_1(i+1) - \left(1 - \frac{a_1}{a_0}T\right)x_1(i) + \frac{b_1}{a_0}Tu_1(i+1) + \frac{T}{a_0}(b_0T - b_1)u_1(i); \quad (2)$$

$$x_1(i+2) = \left(2 - \frac{a_1}{a_0}T\right)x_1(i+1) - \left(1 - \frac{a_1}{a_0}T\right)x_1(i) - b_0u_2(i); \quad (3)$$

$$x_2(i+2) = \left(2 - \frac{a_1}{a_0}T\right)x_2(i+1) - \left(1 - \frac{a_1}{a_0}T\right)x_2(i) + \frac{b_1}{a_0}Tu_2(i+1) + \frac{T}{a_0}(b_0T - b_1)u_2(i); \quad (4)$$

$$x_2(i+2) = \left(2 - \frac{a_1}{a_0}T\right)x_2(i+1) - \left(1 - \frac{a_1}{a_0}T\right)x_2(i) + \frac{b_1}{T}[u_1(i+1) - u_1(i)], \quad (5)$$

де $a_0 = 1$; $a_1 = (T_{11} + T_{22} + k_{11}k_{21})$; $a_2 = T_{11}T_{22}$; $b_0 = k_{11}$; $b_1 = k_{11}T_{22}$; $i = t/T$ – дискретний час, T – період дискретності.

2. Представлення напірного ящика матрицею дискретних передавальних функцій

Рекурентні різницеві рівняння (2) ... (5) можна подати так:

$$x_1(i+2) + A_1x_1(i+1) - A_0x_1(i) = B_1u_1(i+1) + B_0u_1(i); \quad (6)$$

$$x_1(i+2) + A_1x_1(i+1) + A_0x_1(i) = -B_0u_2(i); \quad (7)$$

$$x_2(i+2) + A_1x_2(i+1) + A_0x_2(i) = B_1u_2(i+1) + B_0u_2(i); \quad (8)$$

$$x_2(i+2) + A_1x_2(i+1) + A_0x_2(i) = B_1u_1(i+1) - B_0u_1(i), \quad (9)$$

де $A_0 = 1 - \frac{a_1}{a_0}T$; $A_1 = -\left(2 - \frac{a_1}{a_0}T\right)$; $B_0 = \frac{1}{a_0}T(b_0T - b_1)$; $B_1 = \frac{b_1}{a_0}T$.

Отже, дискретна передавальна функція каналу 11

$$g_{11}(z) = \frac{B_0 z^{-2} + B_1 z^{-1}}{A_0 z^{-2} + A_1 z^{-1} + 1}. \quad (10)$$

Дискретна передавальна функція каналу 21

$$g_{12}(z) = -\frac{B_0}{A_0 z^{-2} + A_1 z^{-1} + 1}. \quad (11)$$

Дискретна передавальна функція каналу 22

$$g_{22}(z) = \frac{B_0 z^{-2} + B_1 z^{-1}}{A_0 z^{-2} + A_1 z^{-1} + 1}. \quad (12)$$

Дискретна передавальна функція каналу 21

$$g_{21}(z) = \frac{B_1 z^{-1} - B_0}{A_0 z^{-2} + A_1 z^{-1} + 1}. \quad (13)$$

Таким чином, НЯ з ПП як ОК рівнем маси й тиском повітря представляється чотирма дискретними передавальними функціями (10)...(13) або одним векторно-матричним рівнянням:

$$\underline{X}(z) = [G(z)]\underline{U}(z), \quad (14)$$

де $\underline{X}(z) = [x_1(z) \ x_2(z)]^T$ – вектор вихідної змінної системи розміру 2×1 ;

$\underline{U}(z) = [u_1(z) \ u_2(z)]^T$ – вектор вхідної змінної системи розміру 2×1 ;

матриця дискретних передавальних функцій розміру 2×2 :

$$G(z) = \begin{bmatrix} g_{11}(z) & g_{12}(z) \\ g_{21}(z) & g_{22}(z) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

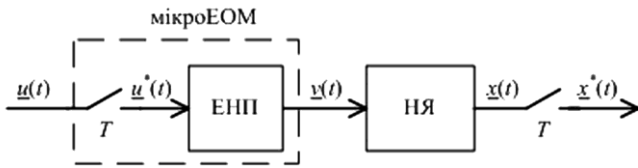


Рис. 2 – Структурна схема каналу керування напірним ящиком

3. Представлення напірного ящика векторно-матричним різницею рівнянням

Припустимо, що розглядуваний ОК має два вектори вхідних діянь $\underline{v}(t)$ й два вектори вихідних змінних $\underline{x}(t)$ (рис. 2).

Як показано в [1] цей ОК представляється неперервним векторно-матричним рівнянням:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A_i \underline{x}(t) + B_i \underline{v}(t), \quad (16)$$

де $A_i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_{11}} & -\frac{k_{12}}{T_{11}} \\ -\frac{k_{21}}{T_{11}T_{22}} & -\frac{T_{11} + k_{12}k_{21}}{T_{11}T_{22}} \end{bmatrix}$ – матриця параметрів стану системи розміру 2×2 ; $B_i = \begin{bmatrix} \frac{k_{11}}{T_{11}} & 0 \\ \frac{k_{11}k_{21}}{T_{11}T_{22}} & \frac{k_{22}}{T_{22}} \end{bmatrix}$ –

матриця керування системи розміру 2×2 ; $\underline{x}(t) = [x_1 \ x_2]^T$ – вектор вихідної змінної системи розміру 2×1 ;

$\underline{v}(t) = [v_1 \ v_2]^T$ – вектор вхідної змінної системи розміру 2×1 .

У дискретній формі векторно-матричне рівняння (16) потрібно подати так:

$$\underline{x}(i+1) = A_{\#} \underline{x}(i) + B_{\#} \underline{u}(i), \quad (17)$$

де $A_{\#}$ і $B_{\#}$ – відповідно, матриця стану і матриця керувальних діянь дискретної системи (напірного ящика).

Згідно з визначенням екстраполятора нульового порядку (ЕНП) [2] для $t \in [iT, (i+1)T]$ $\underline{v}(t) = \underline{u}(iT) = \text{const}$.

Розв'язок векторно-матричного рівняння (16) в момент часу t .

$$\underline{x}(t) = e^{A_i(t-iT)} \underline{x}(iT) + \int_{iT}^t e^{A_i(t-\tau)} B_i \underline{u}(iT) d\tau. \quad (18)$$

Стан неперервної системи в момент часу $(i+1)T$

$$\underline{x}(i+1)T = e^{A_i T} \underline{x}(iT) + \left[\int_{iT}^{(i+1)T} e^{A_i[(i+1)T-\tau]} d\tau \right] B_i \underline{u}(i). \quad (19)$$

Порівняння рівнянь (17) і (19) дозволяє встановити можливість використання для дискретного представлення НЯ з ПП вектор його стану $\underline{x}(i)$, який буде ідентичним вектору стану $\underline{x}(t)$ в момент

дискретизації $t = iT$. Отже, можна співставити неперервне векторно-матричне рівняння стану системи (16) з дискретним векторно-матричним рівнянням стану системи (17) у якому

$$A_a = e^{A_t T}; \quad (20)$$

$$B_a = \left[\int_0^T e^{A_t [T-\tau]} d\tau \right] B_t, \text{ або } B_a = A_t^{-1} [e^{A_t T} - I] B_t.$$

Оскільки матриця A_n регулярна [3], то B_d можна визначити і так:

$$B_a = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T^{i+1}}{(i+1)!} A_t^i B_t.$$

Таким чином НЯ з ПП як ОК рівнем маси й тиском повітря можна представити векторно-матричним рівнянням (17).

За рівнянням (17) легко побудувати і векторно-матричну структурну схему цього ОК (рис. 3).

До векторно-матричного рівняння стану системи (17) зробимо дві примітки.

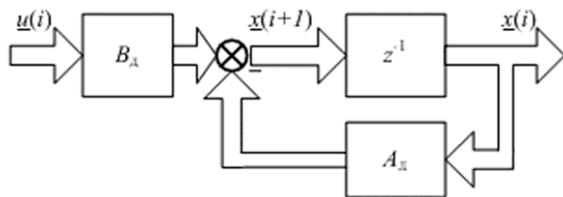


Рис. 3 – Векторно-матрична структурна схема НЯ з ПП як ОК рівнем маси у напускній камері й тиском повітря в повітряній подушці

Примітка 1. Оскільки матриці A_n і B_n , а також період дискретності T є фіксованими (сталими) для заданого режиму роботи НЯ, то матриці A_d і B_d також будуть сталими. Отже, вони можуть бути легко обчислені. З іншого боку, розроблені нами векторно-матричні рівняння (16) і (17) свідчать про те, що неперервне і дискретне представлення НЯ з ПП строго еквівалентні одне одному. У разі заміни одного представлення іншим відсутня будь-яка апроксимація.

Примітка 2. Аналіз виразу (20) свідчить про те, що матриця стану A_d дискретного рівняння (17), співставленого з неперервним рівнянням (16) є регулярною (невиродженою) матрицею, оскільки перехідна матриця неперервної системи

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

регулярна для будь-якого t . Отже, перехідна матриця дискретної системи

$$\Phi(i, i_0) = A_t^{i-i_0},$$

співставлена з неперервною системою, у якій відсутні запізнювання у каналах керування, також буде регулярною.

4. Представлення напірного ящика матрицею числових послідовностей

Якщо НЯ з ПП в неперервній формі представлено матрицею імпульсних перехідних функцій [1], то в дискретній формі він представляється матрицею числових послідовностей (ЧП):

$$G(k) = \begin{bmatrix} g_{11}(k) & g_{12}(k) \\ g_{21}(k) & g_{22}(k) \end{bmatrix},$$

де $g_{11}(k)$, $g_{12}(k)$, $g_{21}(k)$ і $g_{22}(k)$ – числові послідовності НЯ за каналами 11, 12, 21 і 22.

У загальному вигляді дискретні передавальні функції (10) ... (13) можна подати так:

$$g(z) = \frac{B_0 z^{-2} + B_1 z^{-1} + B_2}{A_0 z^{-2} + A_1 z^{-1} + 1}.$$

Отже, узагальнена ЧП НЯ з ПП

$$\begin{cases} g_{ij}(0) = B_2; \\ g_{ij}(1) = B_1 - A_1 g_{ij}(0); \\ g_{ij}(2) = B_2 - A_1 g_{ij}(1) - A_0 g_{ij}(0); \\ \dots \\ g_{ij}(k) = -\sum_{l=1}^2 A_l g_{ij}(k-l), \end{cases}$$

де $k = 3, \dots, N$; $i = 1, 2$; $j = 1, 2$.

Висновки. НЯ з ПП як ОК рівнем маси у напускній камері і тиском повітря у ПП має два прямих канали: «витрата маси, що подається у напірний ящик – рівень маси у напускній камері» (канал 11) і «витрата повітря, що подається у ПП – тиск повітря у ПП» (канал 22) та два перехресних канали: «витрата маси, що подається у напірний ящик – тиск повітря у ПП» (канал 12) і «витрата повітря, що подається у ПП – рівень маси у напускній камері» (канал 21).

Розглядуваний об'єкт керування може бути представлений:

1. Чотирма рекурентними різницевиими рівняннями, які пов'язують два входи (витрата маси і повітря, що подається у напірний ящик) з двома виходами (рівень маси у напускній камері й тиск повітря у ПП);

2. Матрицею дискретних передавальних функцій, до якої входять дискретні передавальні функції прямих 11 і 22 каналів і дискретні передавальні функції перехресних каналів 12 і 21;

3. Одним дискретним векторно-матричним рівнянням стану системи, у якому в якості стану системи слугують фізично вимірювальні величини (рівень маси у напускній камері й тиск повітря у ПП);

4. Чотири числовими послідовностями, які описують поведінку системи у разі подачі на її вхід імпульсів Кронекера.

Перспективи подальших досліджень. Подальші дослідження стосуватимуться розроблення детермінованого лінійного оптимального керування НЯ з ПП на базі використання векторно-матричного рівняння стану системи (17).

Список використаної літератури

1. *Жученко А. І.* Неперервні форми представлення напірних ящиків з повітряною подушкою // А. І. Жученко, М. С. Піргач, Я. Ю. Жураковський – Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут», Серія «Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження», 2016. № 1 (15), – С. 123 – 127.: іл. – Бібліогр.: С. 126.
2. *Жученко А. І.* Математичні моделі цифрових систем керування [Текст] : навч. посібник / А. І. Жученко; Національний технічний ун-т України «Київський політехнічний ін-т». – К. : ІЗМН, 1997. – 238 с. – Бібліогр.: С. 235. – ISBN 5-7763-9025-7.
3. *Жученко А. І.* Спеціальні розділи математики для дослідження комп'ютерних систем [Текст]: навч. посіб./ А. І. Жученко, Л. Д. Ярошук. – К. : ІВЦ «Видавництво “Політехніка”», 2002. – 208 с.; іл. – Бібліогр.: С. 204–205. – ISBN 966-622-084-9.

Надійшла до редакції 19.11.2016
