УДК 681.51

ЖУЧЕНКО О. А., к.т.н., доц.; ВОЛОЩУК М. Г., магістрант
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інситут імені Ігоря Сікорського»

КЕРУВАННЯ ЦИКЛІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ З ІТЕРЦІЙНИМ НАВЧАННЯМ

Збіжність – важлива задача при проектуванні та застосуванні керування з ітеративним навчанням (КІН) циклічними процесами. Дана стаття презентує новий метод синтезу робастного керування з ітеративним навчанням. Наводяться необхідні та достатні умови стійкості системи керування з обмеженими вхідними та вихідними сигналами (ОКОВ) при побудові оптимальної КІН, задачею якої є слідкування за довільним обмеженим сигналом завдання. Запропоновано спосіб вибору вагових матриць налаштування для процесу з неточно визначеним початковим станом та діючими збуреннями. Ефективність запропонованого алгоритму досліджується на прикладі.

Ключові слова: *циклічні процеси, ітераційне навчання, керувальні сигнали, збурення, стійкість*.

Постановка проблеми. Циклічні технологічні процеси широко розповсюджені у різних галузях промисловості: машинобудівній, хімічній, харчовій, металургійній та інших. Історія використання цих процесів налічує, мабуть, не одне століття. Незважаючи на це, системам керування циклічними процесами почали приділяти серйозну увагу відносно недавно. Одним з найбільш ефективних методів керування циклічними процесами є керування з ітеративним навчанням [1–4].

Аналіз попередніх досліджень. Керування з ітеративним навчанням (КІН) подібне процесу навчання людини. З самого початку даний метод розроблявся для маніпуляторів промислових роботів, коли потрібно повторювати задану траєкторію руху з високою точністю. Для циклічних процесів КІН від ітерації до ітерації покращує точність керування у межах двох часових вимірностей, перша з яких позначається індексом k і характеризує перехід від одного циклу роботи до наступного, та друга з індексомt визначає поточний час на протязі кожного окремо взятого циклу роботи. Це 2D-вимірне керування відрізняється від традиційного 1D-вимірного, де керування змінюється тільки на протязі часу t.

Загальною науковою проблемою КІН є створення такого алгоритму, який генерує керувальні сигнали у такий спосіб, що якість керування покращується від одного циклу роботи (ітерації) до наступного.

Поняття керування з ітеративним навчанням вперше було введено у роботі [1], а пізніше математично сформульовано у [2]. З того часу багато зусиль було докладено для розробки та дослідження даного методу керування. КІН було застосовано для керування багатьох об’єктів, таких як реактори та дистиляційні колони періодичної дії, пресування [3].

Система КІН працює як розімкнена. Однак було показано [4], що система КІН, яка не використовує зворотний зв’язок, чутлива до збурень та має повільну збіжність. У зв’язку з цим у роботі [5] запропонували свій КІН-алгоритм, який об’єднує стандартну схему даного метода та оптимальний зворотний зв’язок, побудований з використанням рівняння Ріккаті, що призводить до гарантованої збіжності алгоритму за експоненціальним законом. Проведені дослідження показали, що даний алгоритм значно ефективніший за стандартний, що розширює можливості його практичного впровадження.

У промислових умовах завжди існують невизначеності у діючих збуреннях, а також не завжди наступний цикл роботи повністю повторює попередній. Ці обставини розглянуті вище алгоритми не враховують.

Метою статті є розроблення КІН-алгоритму, який враховував би невизначенності діючих на об’єкт керування збурень, а також зміни початкового стану об’єкта від циклу до циклу роботи.

Передбачається, що об’єкт керування математично описується у просторі станів дискретною моделлю

$$\begin{aligned} &x_k(t+1) = Ax_k(t) + Bu_k(t) + v_k(t), \\ &0 \le t \le N,\ k = 0, 1, 2, \dots, \\ &y_k(t) = Cx_k(t) + \omega_k(t), \\ &x_k \in \Re^n,\ u_k \in \Re^m,\ y_k \in \Re^p \end{aligned} \tag{1}$$

де k – номер ітерації (циклу роботи); t– поточний час. Таким чином, $y_k(t)$ виходом об’єкта керування у час t на k-му циклі роботи$v_k(t)$ та$w_k(t)$ – обмежені збурення, що діють на стан та вихід об’єкту відповідно. Для спрощення будемо вважати, що матриці A, B та C є стаціонарними.

Використовуючи рівняння (1), дістанемо:

$$y_k(t) = \sum_{l=0}^{t-1} CA^{t-1-l} Bu_k(l) + h_k(t) \tag{2}$$

$$h_k(t) = CA^t x_k(0) + \sum_{l=0}^{t-1} CA^{t-1-l} v_k(l) + w_k(t) \tag{3}$$

Рівняння (2) та (3) перепишемо у матричній формі

$$y_k = Gu_k + \eta_k, \tag{4}$$

де

$$y_k = \begin{bmatrix} y_k(1) \\ y_k(2) \\ \vdots \\ y_k(N) \end{bmatrix}, \quad u_k = \begin{bmatrix} u_k(0) \\ u_k(1) \\ \vdots \\ u_k(N-1) \end{bmatrix}, \quad \eta_k = \begin{bmatrix} \eta_k(1) \\ \eta_k(2) \\ \vdots \\ \eta_k(N) \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-1} & CA^{N-2}B & \cdots & CB \end{bmatrix}.$$

В останніх виразах опущений аргументt. Матриця G є нижньою трикутною блочною матрицею, відомою як матриця Тепліца [6, 7]. Згідно КІН-алгоритму y_k та u_k попереднього циклу мають запам'ятовуватись для розрахунку $u_{k+1}(t)$ поточного циклу.

Метою КІН-алгоритму, що розробляється, є забезпечення для заданої траєкторії$r(t)$, $1 \le t \le N$ ітеративного зменшення похибки відслідковування від циклу до циклу навіть при наявності неточностей оцінювання початкового стану та невизначених збурень.

Алгоритм керування. Розглянемо іншу систему, що використовує матриці A, Bта C з (1):

$$\begin{gathered} \hat{x}_k(t+1) = A\hat{x}_k(t) + Bu_k(t), \\ 0 \le t \le N,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \\ \hat{y}_k(t) = C\hat{x}_k(t), \\ \hat{x}_k \in \Re^n,\ u_k \in \Re^m, \hat{y}_k \in \Re^p, \end{gathered} \tag{5}$$

де змінні з позначкою «^» означають «ідеальні» змінні стану та вихідні змінні, розраховані в умовах відсутності збурень та похибок початкового стану.

Для заданого на інтервалі $1 \le t \le N$ виходу системи на (κ + 1)-му циклі роботи ідеальне оптимальне КІН визначається шляхом мінімізації по $u_{k+1}(t)$ наступного квадратичного критерія якості:

$$J_{k+1} = \sum_{t=1}^{N} [r(t) - \hat{y}_{k+1}(t)]^T Q(t)[r(t) - \hat{y}_{k+1}(t)] + \sum_{t=0}^{N-1} [\Delta u_{k+1}(t)]^T R(t)[\Delta u_{k+1}(t)], \tag{6}$$

де$\Delta u_{k+1}(t) = u_{k+1}(t) - u_k(t)$, а вагові матриці $Q(t)$ та $R(t)$– довільні симетричні додатно визначені для всіхt.

Критерій якості (6) може бути переписаний у матричній формі:

$$J_{k+1} = [r - \hat{y}_{k+1}]^T Q[r - \hat{y}_{k+1}] + \Delta u^T_{k+1} R \Delta u_{k+1} \tag{7}$$

де

$$Q = \mathrm{diag}\{Q(1), Q(2), \ldots, Q(N)\}, \quad R = \mathrm{diag}\{R(0), R(1, \ldots, R(N-1)\}$$

та

$$\hat{y}_k = \begin{bmatrix} \hat{y}_k(1) \\ \hat{y}_k(2) \\ \vdots \\ \hat{y}_k(N) \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(N) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Знаходячи похідну по u_{k+1} у виразі (7), отримуємо ідеальне оптимальне керування:

$$\hat{u}_{k+1} = \hat{u}_k + R^{-1} G^T Q[r - y_{k+1}]. \tag{9}$$

При цьому треба зазначити, що керування згідно закону (9) залежить від $\hat{y}_{k+1}(t')$ для$t \le t' \le N$.

Для умов відсутності збурень та похибок початкового стану аналогічний алгоритм керування запропонований у роботі [5]:

$$\begin{gathered} S(t) = A^T S(t+1)\{I - B[B^T S(t+1)B + R(t+1)]^{-1} \times B^T S(t+1)\}A + C^T Q(t+1)C, \\ t = 0, 1, \ldots, N-1;\ S(N) = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \phi_{k+1}(t) = [I + S(t)BR^{-1}(t)B^T]^{-1}[A^T \times \phi_{k+1}(t+1) + C^T Q(t+1)\hat{e}_k(t+1)], \\ t = 0, 1, \ldots, N-1;\ \phi_{k+1}(N) = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

де

$$\hat{e}_k(t+1) = r(t+1) - \hat{y}_k(t+1).$$

Згідно [5], оптимальне керування розраховується за формулою:

$$\hat{u}_{k+1}(t) = \hat{u}_k(t) - [B^T S(t)B + R(t)]^{-1} B^T \times S(t)A[\hat{x}_{k+1}(t) - \hat{x}_k(t)] + R^{-1}(t)B^T \phi_{k+1}(t). \tag{12}$$

Даний вираз свідчить про те, що ідеальне керування може бути визначено ітеративно, використовуючи ідеальне значення змінних стану $\hat{x}_k$та $\hat{y}_k$ з (5).

Цей КІН-алгоритм є також оптимальним для системи, що описується рівнянням (4) при $\eta_k = 0$, тобто при умові, що збурення відсутні.

При наявності збурень та похибок початкового стану розрахунок u_k має проводитись за рівняннями (10-12) із заміною величин $\hat{x}_k$та $\hat{y}_k$на величини x_kта y_k відповідно, визначені за моделлю (1). Звідси, закон керування записується у вигляді

$$u_{k+1} = u_k + R^{-1} G^T Q e_{k+1}, \tag{13}$$

$$\phi_{k+1}(t) = [I + S(t)BR^{-1}(t)B^T]^{-1} \times [A^T \phi_{k+1}(t+1) + C^T Q(t+1)e_k(t+1)],$$

$$t = 0, 1, ..., N-1; \phi_{k+1}(N) = 0, \tag{14}$$

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) - [B^T S(t)B + R(t)]^{-1} B^T \times S(t)A[x_{k+1}(t) - x_k(t)] + R^{-1}(t)B^T \phi_{k+1}(t). \tag{15}$$

де $S(t)$ дістаємо з рівняння (10).

Важливу роль у забезпеченні робастності та збіжності наведеного вище алгоритму керування відіграє вибір матриць Q та R.

Дослідження робастності та збіжності алгоритму керування. Будемо вважати, що система керування, яка розглядається має обмеження як за величинами керувань, так і за виходами (ОКОВ).

Теорема 1. (Робастна ОКОВ-стійкість). КІН-алгоритм (10), (13–15) по відношенню до обєкта керування (1) є робастно ОКОВ-стійким, якщо матриці $I+GR^{-1}G^TQ$ та $I+R^{-1}G^TQG$ мають власні значення, розташовані поза одиничним колом, тобто

$$\|I + R^{-1}G^TQG\| > 1, \tag{16}$$

$$\|I + GR^{-1}G^TQ\| > 1. \tag{17}$$

Доведення. Помножимо рівняння (13) на G з урахуванням (4), а також $e_k = r - y_k$, дістанемо

$$e_{k+1} = e_k - GR^{-1}G^TQe_{k+1} - \Delta\eta_{k+1}, \tag{18}$$

де $\Delta\eta_{k+1} = \eta_{k+1} - \eta_k$. Ітеративна формула для розрахунку e_kмає вигляд

$$e_{k+1} = (I + GR^{-1}G^TQ)^{-1}e_k - (I + GR^{-1}G^TQ)^{-1}\Delta\eta_{k+1} \tag{19}$$

Підставляючи $e_{k+1} = r - y_{k+1}$у (13) та використовуючи (4), отримаємо

$$u_{k+1} = (I + R^{-1}G^TQG)^{-1}u_k + (I + R^{-1}G^TQG)^{-1}R^{-1}G^TQ(r - \eta_{k+1}) \tag{20}$$

Висновок про стабільність випливає з класичної теорії дискретних систем керування.

Теорема 2. (Збіжність). Нехай КІН-алгоритм, виражений рівнянням (10) та (13-15) застосований до об'єкту, який математично описується рівняннями (1). При цьому матриці Q та R задовольняють виразам (16) та (17). Якщо в усіх циклах роботи початкові умови $x_k(0)$ однакові, а, зовнішні збурення$v_k(t)$ та $w_k(t)$ мають ті ж самі характеристики, умовами збіжності КІН-алгоритму є

$$\lim_{k\to\infty} u_{k+1} = (G^TQG)^{-1}G^TQ(r - \eta^*), \tag{21}$$

$$\lim_{k\to\infty} e_{k+1} = 0, \tag{22}$$

де η^* – деякий сталий вектор.

Доведення. Якщо всі цикли роботи повторюють один одного, з рівняння (3), випливає, що існує сталий вектор η^* такий, що $\eta_k = \eta^*$ для всіх k. Використовуючи рівняння (19) та (20), отримуємо

$$u_{k+1} = (I + R^{-1}G^TQG)^{-k}u_0 + \sum_{l=1}^{k}(I + R^{-1}G^TQG)^{-l}R^{-1}G^TQ(r - \eta_{k+2-l}), \tag{23}$$

$$e_{k+1} = (I + GR^{-1}G^TQ)^{-k}e_0 - \sum_{l=1}^{k}(I + GR^{-1}G^TQ)^{-l}\Delta\eta_{k+2-l}. \tag{24}$$

Звідси, при умові робастної ОКОВ-стійкості, сформульованій у теоремі 1,

$$\lim_{k\to\infty} u_{k+1} = (I + R^{-1}G^TQG)^{-1}[I - (I + R^{-1}G^TQG)^{-1}]^{-1} \times R^{-1}G^TQ(r - \eta^*) =$$

$$= (R^{-1}G^TQG)^{-1}R^{-1}G^TQ(r - \eta^*) = (G^TQG)^{-1}G^TQ(r - \eta^*),$$

що відповідає рівнянню (21).

Приймаючи до уваги $\Delta\eta_{k+1} = 0$ та зважаючи на (24), маємо результат, який відповідає (22).

Вибір вагових матриць. Нехай $R = \lambda I$ та $Q = \mu I$, де λ та μ – додатні константи. Позначимо $\rho = \mu/\lambda$. Вибір величин λ та μ повинні забезпечити робастну ОКОВ-стійкість. Це твердження безпосередньо випливає з рівнянь (16) та (17) при умові додатності λ та μ та наявності хоча б одного додатного власного значення матриці GTG абоGGT.

Подальшою задачею є визначити λ та μ такі, щоб алгоритм керування забезпечував задану траєкторію руху системи з високою збіжністю.

З рівнянь (13) – (15) маємо

$$u_{k+1} = (I + \rho G^TG)^{-k}u_0 + \sum_{l=1}^{k}\rho(I + \rho G^TG)^{-l}G^T(r - \eta_{k+2-l}) \tag{25}$$

$$e_{k+1} = (I + \rho GG^T)^{-k}e_0 - \sum_{l=1}^{k}(I + \rho GG^T)^{-l}\Delta\eta_{k+2-l} \tag{26}$$

Отже, при відомій матриці GG^T велике значення ρ (велике) буде забезпечувати зменшення похибки e_0 у першому циклі роботи, тобто швидка збіжність може бути досягнута від циклу до циклу.

Однак з рівнянь (14) та (15) отримуємо

$$S(t) = A^T S(t+1)\{I - B[B^T S(t+1)B + \lambda I)]^{-1} \times B^T S(t+1)\}A + \mu C^TC)$$

при $t = 0, 1, ..., N-1; S(N) = 0;$ (27)

$$\phi_{k+1}(t) = \lambda[\lambda I + S(t)BB^T]^{-1} \times [A^T\phi_{k+1}(t+1) + \mu C^Te_k(t+1)]$$

при $t=0,1,...,N-1; k+1(N)=0;$ (28)

$$u_{k+1}(t)=u_k(t)-[B^T K(t)B+\lambda I\ ]^{-1}B^T\times S(t)A[x_{k+1}(t)-x_k(t)]+\lambda^{-1}B^T\phi_{k+1}(t), \tag{29}$$

звідки видно, що величина ρ призводить до значного впливу на $u_{k+1}(t)$ величини $\Phi_{k+1}(t)$, роблячи систему керування меньш чутливою до зміни завдання. Крім того, даний вплив спричиняє накопичення стохастичної похибки від невизначеностей та зовнішніх збурень, що викликає значні коливання сигналів керування.

З іншого боку, з рівнянь (3), (19) та (20) випливає, що коли матриця A має власні значення поза одиничним колом, початкові невизначеності та зовнішні збурення можуть викликати досить повільну збіжність або навіть коливний режим. Дані міркування свідчать про необхідність зменшувати ρ_kвід циклу до циклу, тобто $\rho_k\rightarrow 0$ (або $\mu_k\rightarrow 0$) при $k\rightarrow\infty$. Тоді рівняння (10) та (28) набувають виду

$$S_k(t)=A^T\ S_k(t+1)\{I-B[B^T S_k(t+1)B+\lambda_k\ I\ )]^{-1}\times B^T S_k(t+1)\}A+\mu_k C^T C\ , \tag{30}$$

при = $0,1,\ \ldots,N$-1; $S_k(N)=0$

$$\phi_{k+1}(t)=\lambda_k\ [\ \lambda_k\ I+S_k(t)BB^T\ ]^{-1}\times[A^T\phi_{k+1}(t+1)+\mu_k C^T e_k(t+1)] \tag{31}$$

при $t=0,1,\ \ldots,N$-1; $\phi_{k+1}(N)=0$

Зазвичай $S_k\rightarrow 0$ та $\Phi_k(t)\rightarrow 0$, коли $k\rightarrow\infty$, що свідчить про швидку збіжність $u_k(t)$ та $e_k(t)$при виконанні умов теореми 1 та рівняння (15).

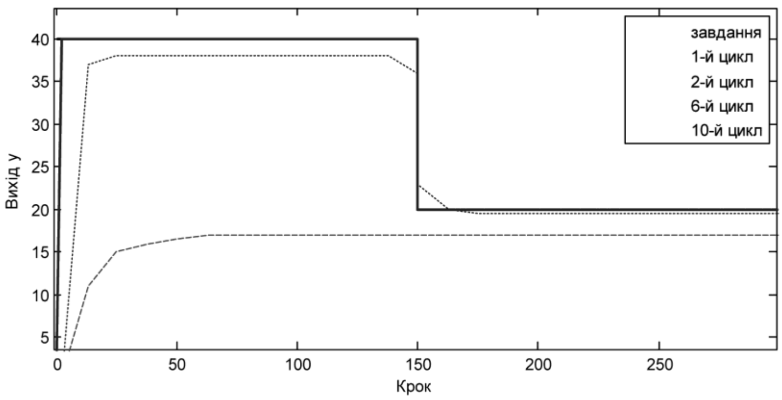
Дослідження КІН-алгоритму. Об’єкт, що досліджується, описується наступним чином

$$x(t+1)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0.22 & 0.65\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t),$$

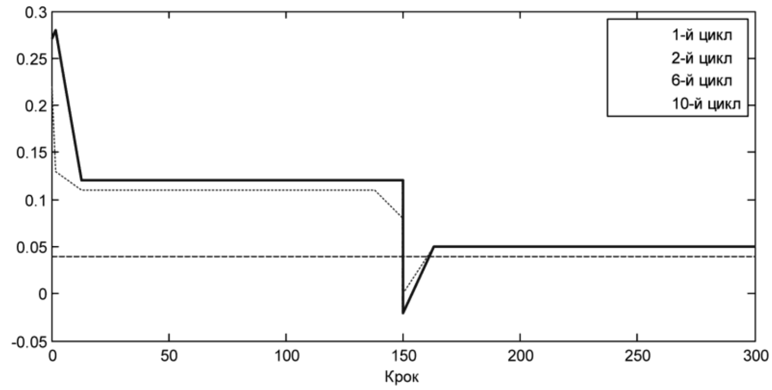
$$y(t)=\begin{bmatrix}-98.2 & 147.37 & 0\end{bmatrix}x(t)\cdot \tag{32}$$

Як випливає з (32), спочатку досліджується система, у якій не діють зовнішні збурення.

Описаний вище КІН-алгоритм з параметрами налаштування $Q=R=1$ був застосований до системи (32). Сигнал завдання, який повинна відслідковувати досліджувана система керування, змінюється, як показано на рис. 1а неперервною лінією. Сигнал керування, зображений на рис. 1б, і на першому циклі роботи він дорівнює 0.04. Як видно з рис. 1а на першому циклі роботи вихідний сигнал далекий від завдання. Однак система керування демонструє високу збіжність вже на другому циклі роботи. Вихідний сигнал системи на шостому та десятому циклах свідчать про чітке відслідковування завдання.



а



б

а – вихідні змінні, б – керування

Рис. 1 – Результати моделювання

Дане дослідження підтвердило, що КІН-алгоритм забезпечує високу якість керування в умовах відсутності початкових невизначеностей та зовнішніх збурень.

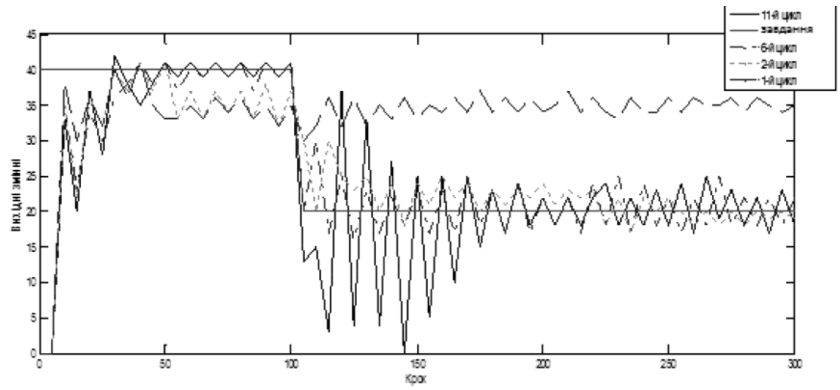
Надалі дослідження проводилося з урахуванням дії зовнішніх збурень.

На першому етапі дослідження матриці $Q = R = 1$ вибрані такими же, як і у попередньому випадку, і не змінювались на протязі всього часу дослідження. На рис. 2 показані зміни вихідного сигналу (а) та керування (б) (сигнал керування виражений у відсотках діапазону його зміни). Як видно з рис. 2а вихідний сигнал стає коливним із збільшенням амплітуди коливань при переході від одного циклу роботи до наступного (при збільшенні k), на відміну від результатів, отриманих раніше.

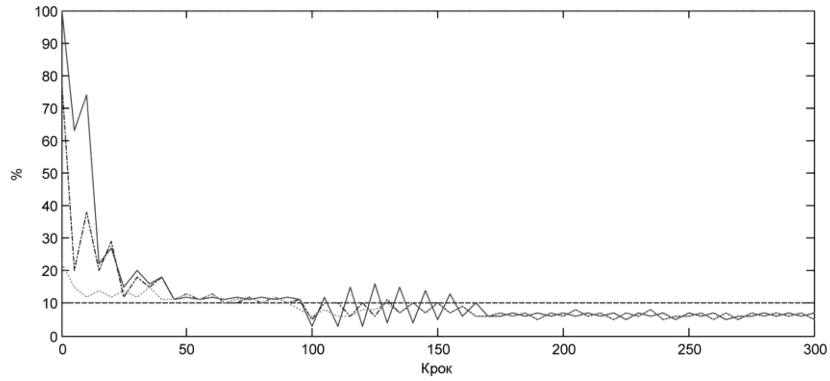
На другому етапі дослідження використовувався модифікований КІН-алгоритм з введенням змінного параметру налаштування ρ. На першому циклі роботи $\rho = 1$. На наступних циклах ρ зменшувалось за експоненціальним законом: $\rho = 0.6^{k-1}$. Відповідні сигнали виходу та керування представлені на рис. 3. Як видно з даного рисунку, на другому циклі роботи спостерігається швидка збіжність алгоритму керування. Вже на шостому циклі вихідний сигнал достатньо близький до заданого, а на десятому фактично повторює його.

Таким чином, використання модифікованого КІН-алгоритму дозволило ліквідувати коливання вихідного сигналу, забезпечило швидку збіжність до заданої траєкторії руху при збільшенніk та стійкість системи керування.

Висновки. Запропоновано алгоритм керування з ітеративним навчанням для об’єктів, що працюють у циклічному режимі. Даний алгоритм дозволяє враховувати невизначенності в оцінюванні початкового стану системи керування, а також зовнішні збурення, які діють у системі. Проведено дослідження робастності та збіжності запропонованого алгоритму. Введення змінного параметру налаштування вагових матриць у квадратичному критерії якості роботи системи підвищило її ефективність в умовах початкових невизначеностей та дії зовнішніх збурень.



а



б

а – вихідні змінні, б – керування

Рис. 2 – Результати моделювання

Перспективи подальших досліджень. Подальші дослідження мають бути направлені на вивчення результатів застосування запропонованих алгоритмів керування для різних об’єктів, які працюють циклічно, із змінними умовами дії зовнішніх збурень.

Список використаної літератури

1. *Uchiyama, M.* (1978). Formation of high-speed motion pattern of a mechanical arm by trial. Transactions of Society for Implementation and Control Engineers (in Japanese), 14, 706–712.

2. *Arimoto, S., Kawamura, S., & Miyazaki, F.* (1984). Bettering operation of robots by learning. Journal of Robotic Systems, 1, 123–140.
3. *Lee, K.S., Bang, S.H., Yi, S., Son, J.S., & Yoon, S.C.* (1996). Iterative learning control of hear-up phase for a batch polymerization reactor. Journal of Process Control, 6, 255–262.
4. *Bien, Z., & Xu, J. (Eds).* (1998). Iterative learning control. Boston: Kluwer Academic Publisher.
5. *Amann, N., Owens, D.H., & Rogers, E.* (1996). Iterative learning control for discrete-time systems with exponential rate of convergence. IEE Proc. Part-D, Control Theory and Application, 143, 217–224.
6. Böttcher, Albrecht; Grudsky, Sergei M. (2012). Toeplitz Matrices, Asymptotic Linear Algebra, and Functional Analysis, Birkhäuser.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – 5-е изд. – М. : Физматлит, 2004. – 560 с.

Надійшла до редакції 19.09.2016